

# UTILISATION PRATIQUE DE LA METHODE DE SIMULATION DANS L'ASSURANCE „NON LIFE”

D'HOOGHE, FRANCKX ET GENNART  
Bruxelles

## I. — INTRODUCTION

Les colloques successifs d'Astin ont eu le mérite de clarifier certaines idées théoriques importantes. En invitant au colloque d'Arnhem les actuaires à penser aux méthodes de Monte Carlo, les organisateurs ont forcément orienté les recherches vers le domaine des applications. Car simuler, c'est à dire établir des résultats conformes à un processus aléatoire bien déterminé, suppose à priori que les données numériques d'introduction (ou de définition) ont été fixées.

Nous ne reprendrons pas les principes de la méthode de simulation, ils sont donnés de manière magistrale dans „Notes on operations research 1959” du centre de recherche opérationnelle du Massachusetts Institute of Technology. Le chapitre II, portant titre „Simulation of Random processes” rédigé par Herbert P. Galliher donne un exposé complet du problème. Nous renvoyons à cette référence.

Parmi les idées que l'on doit retenir, car elle est d'application dans tous les domaines, nous citons „Never simulate a single numerical problem; always simulate several of a class of problems”.

Dans le domaine non life, cet aspect est fondamental. Ce qui y fait défaut, ce sont des algorithmes généraux de résolution numériques. Une des difficultés majeures rencontrées par les actuaires a été et est encore le calcul effectif des convolutions. Ceux qui ont établi cette note se sont posé la question de savoir si la méthode de Monte Carlo ne pouvait fournir un procédé:

- évitant les convolutions.
- suffisamment général pour être applicable à une classe de risques arbitraire.
- donnant comme sous-produit des éléments intéressant aussi bien les théoriciens que les praticiens.

Une réponse largement positive semble donnée à ces desiderata.

La base de la méthode de simulation est le théorème de Cantelli-Glivenko: „lorsque la taille d'un échantillon augmente la fonction de distribution de l'échantillon converge fortement vers la fonction de distribution de la population dont l'échantillon a été extrait”.

Un risque quelconque — n'appartenant pas nécessairement à une classe homogène — est défini par *deux coordonnées stochastiques*. D'une part *l'intensité du risque* (valeur aléatoire du nombre de sinistres frappant un contrat au cours de l'année), d'autre part la *hauteur du sinistre* (montant aléatoire de chaque sinistre particulier). L'algorithme de simulation doit être programmé de façon à être utilisable quelles que soient les coordonnées stochastiques.

En introduisant dans l'ordinateur des valeurs particulières — donc numériques — de ces coordonnées stochastiques, celui-ci réalisera une épreuve simulée, dont le résultat est la dépense totale annuelle pour un contrat. En répétant cette épreuve un grand nombre de fois, et en enregistrant les résultats, on constitue la *population numérique de référence*. A partir de cette dernière, on déduira comme sous-produits par des sous-routines les autres résultats statistiques. Dans nos expériences, cette population de base comportant 360.000 valeurs simulées (nombre non pris au hasard), elle nous a permis de nous rendre compte de la convergence effective annoncée par le théorème de Cantelli-Glivenko.

Le métier d'assureur est possible parce que par les cumuls des résultats individuels des régularités statistiques sont constatées. Le problème des cumuls est par suite essentiel.

Une question que nous nous sommes posée peut s'énoncer comme suit: *Existe-t-il une méthode systématique permettant de calculer le budget stochastique relatif à un nombre arbitraire de contrats?*

En d'autres mots, si un ensemble de risques comporte  $k = 765$  contrats est-il possible de donner en début d'exercice les valeurs numériques de la fonction de distribution du total à payer pour cet ensemble de contrats?

Deux méthodes peuvent être envisagées:

— la première: par cumul des résultats de contrats de la population de base et application de la méthode de Cantelli-Glivenko; elle a

été effectivement utilisée pour les valeurs de  $k = 1, 4, 9, 25, 100, 400, 900$ .

- la seconde: par une méthode d'approximation, (interpolation ou extrapolation) à partir de certaines courbes de budget particulières (celles déduites par la première méthode) on cherche à établir celle de l'effectif imposé. La deuxième méthode est basée sur l'utilisation des „courbes de transformations”. Si  $F(x)$  et  $\Phi(y)$  sont deux fonctions de répartition des variables  $X$  et  $Y$ , une telle courbe de transformation définit la fonction  $y = f(x)$  telle que:  $\Phi[f(x)] \equiv F(x)$

Dans le cadre d'une étude numérique, l'image statistique des courbes de transformation est obtenue à la machine, mais ajustée graphiquement ou par calcul élémentaire. Le choix de la fonction de référence  $F(x)$  n'est pas arbitraire. L'idée d'Esscher nous a amené à essayer la loi normale en particulier.

Des résultats encourageants ont été obtenus de cette manière, ils indiquent que des études subséquentes sont souhaitables.

A partir du moment où l'on dispose du budget stochastique d'un ensemble de risques, on peut étudier tous les problèmes et établir n'importe quelle tarification. Dans cette note, nous avons voulu étudier.

- *l'influence de l'effectif d'une classe de risques sur les chances qu'a un assureur de subir des fluctuations défavorables.*
- *l'influence de l'effectif d'une classe de risques sur la partition de la prime globale pure entre assureur et réassureur, lorsque ce dernier prend à sa charge l'indemnisation au delà d'une certaine limite de retention (stop loss).*

Ce choix particulier montre que les études ont atteint actuellement un niveau tel que la résolution effective et numérique des problèmes pratiques est devenu possible.

Cependant, pour que l'algorithme soit général, et les résultats comparables, il a fallu prendre une définition invariante des fluctuations défavorables. Si  $E$  désigne la valeur moyenne du budget d'une classe de risques, une fluctuation défavorable sera mesurée par:

$$y = E(1 + \rho)$$

$$\rho \geq 0$$

La fluctuation  $y$  correspond à une dépense budgétaire dépassant la valeur probable. La valeur de  $E$  dépend des coordonnées stochastiques et de l'effectif qui varie de cas en cas.

Dès lors, le paramètre principal de l'étude est la *valeur de  $\rho$* , exprimée en pour cents de la valeur moyenne.

L'influence de l'effectif est non négligeable; les résultats consignés dans des tableaux permettent les calculs réels pour un effectif quelconque. Un rapprochement avec les considérations de la full-credibility américaine est instructif.

Le présent travail a été exécuté en team. L'un d'entre nous s'est chargé de la conception générale, le second de la programmation et de l'exécution sur IBM 1620, le troisième de l'exploitation des résultats. Ce team a eu le sentiment net d'avoir appris beaucoup dans l'exécution du présent travail. Il espère que cette expérience sera aussi constructive pour les autres.

## 2. DESCRIPTION DES TRAVAUX DE SIMULATION EFFECTUÉS

### 2.1. Données

a — La variable aléatoire  $N$ , *intensité du risque*, suit une loi dont la fonction de répartition est une image statistique observée, suivant les données ci-après

(1) Nombre de sinistres $n$	(2) Fréquence observée $F_n$	(3) Image statistique de la fonction de réparation $f_n$
0	774	0 58020989
1	375	0 86131934
2	120	0.95127436
3	40	0.98125937
4	15	0 99250374
5	5	0 99625187
6	2	0 99775112
7	1	0.99850074
8	1	0 99925037
9	1	1.0000000

Cette loi est extraite de l'article: „Un problème de tarification de l'assurance accidents d'automobiles examiné par la statistique mathématique” Pierre Delaporte, XVIe Congrès International d'Actuaires. Vol. II, 1960.

b — La variable aléatoire  $M$ , hauteur d'un sinistre, suit la loi théorique exponentielle de moyenne unité dont la fonction de réparation est

$$F(m) = \text{Prob}(M < m) = 1 - e^{-m}$$

c — Pendant la période de référence considérée (une année), un contrat subit un nombre  $n$  de sinistres, dont la *somme des dégâts*

$$S = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

est également une variable aléatoire et représente la dépense possible de l'assureur pour le contrat considéré.

## 2.2. Création d'un fichier de base

On a simulé 360.000 contrats pendant la période de référence d'une année. On a noté pour chacun d'entre eux les valeurs obtenues pour les variables  $N$  (intensité) et  $S$  (somme des dégâts). Ces résultats ont été perforés sur des cartes à raison de 6 contrats par carte, et ont servi à l'établissement des statistiques décrites dans les paragraphes suivants.

La simulation d'un contrat se fait par la méthode classique suivante. La génération d'une variable aléatoire de fonction de répartition donnée se fait à partir de nombres pseudo-aléatoires à distribution uniforme sur l'intervalle  $(0, 1)$ .

Pour ceux-ci, on utilise les formules suivantes (nombres entiers):

$$\begin{aligned} X_1 &= 40353607 = 7^9 \\ X_{j+1} &= a X_j \pmod{M} \text{ avec } a = 7^9 \\ & \quad M = 10^{10} \end{aligned}$$

Les nombres pseudo-aléatoires (compris entre 0 et 1) sont

$$x_j = 10^{-10} X_j \quad j = 1, 2, \dots$$

Chaque fois qu'on a besoin d'un tel nombre, quel que soit son usage, on le détermine à partir du précédent, qui a été conservé en mémoire.

Pour simuler la variable  $N$ , on prend un tel nombre  $x_j$  et on utilise la table du paragraphe 2.1., colonne (3).

Si  $f_{i-1} \leq x_j < f_i$ , on prend  $n = i$   
( $f_{-1} = 0$ )

Pour simuler une valeur  $s$  de la variable  $S$ , on simule  $n$  fois la variable  $M$  (hauteur), par la formule de la fonction inverse de la fonction exponentielle, avec un nombre pseudo-aléatoire  $x_j$  comme argument.

$$m_j = -\ln(1 - x_j)$$

et on fait la somme  $s = \sum_{j=1}^n m_j$

Les premiers couples obtenus pour  $n$  (intensité) et  $s$  (somme des dégâts) sont:

$n$	$s$
0	0.000000
0	0.000000
2	2.088195
0	0.000000
1	1.266251

### 2.3. Un seul contrat. Quelques statistiques importantes et image statistique de la fonction de répartition de la variable $S$ .

1°) Les moments et coefficients suivants ont été calculés par des moyennes portant sur 54.000 contrats. Au cours de ce calcul, on a noté les résultats correspondant à  $N = 9.000, 18.000, 27.000, 36.000$  et  $45.000$  contrats.

a) la moyenne:  $S$

b) l'écart quadratique:  $v(S) = \sqrt{S^2 - (\overline{S})^2}$

c) le moment de troisième ordre:

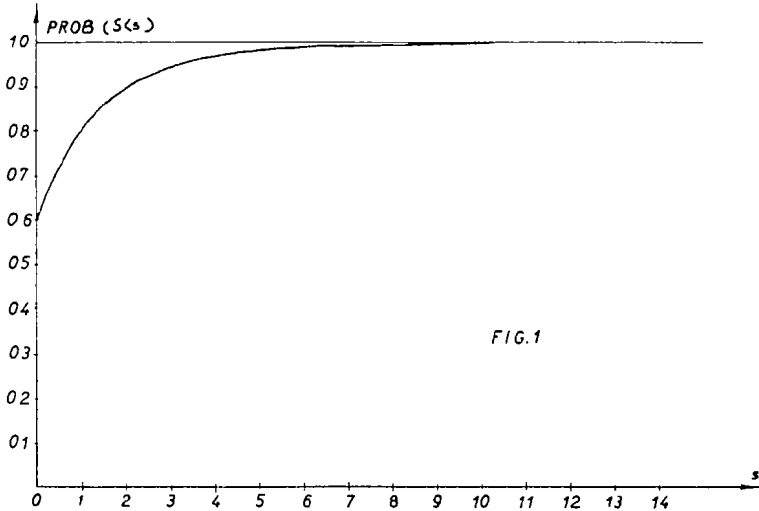
$$m_3(S) = S^3 - 3 S^2 \overline{S} + 2(\overline{S})^3$$

d) le moment de quatrième ordre:

$$m_4(S) = S^4 - 4 \overline{S} S^3 + 6 \overline{S}^2 (S)^2 + 2(\overline{S})^4$$



On a tracé sur la figure 1 la représentation de cette image statistique pour  $N = 54000$ , d'après les résultats numériques de la table de l'annexe 1.



#### 2.4. $k$ Contrats. Image statistique de la fonction de répartition de $S_k$ . Statistiques.

A partir du fichier de base, on a construit des échantillons des variables aléatoires

$$S_k = \sum_{j=1}^k s_j$$

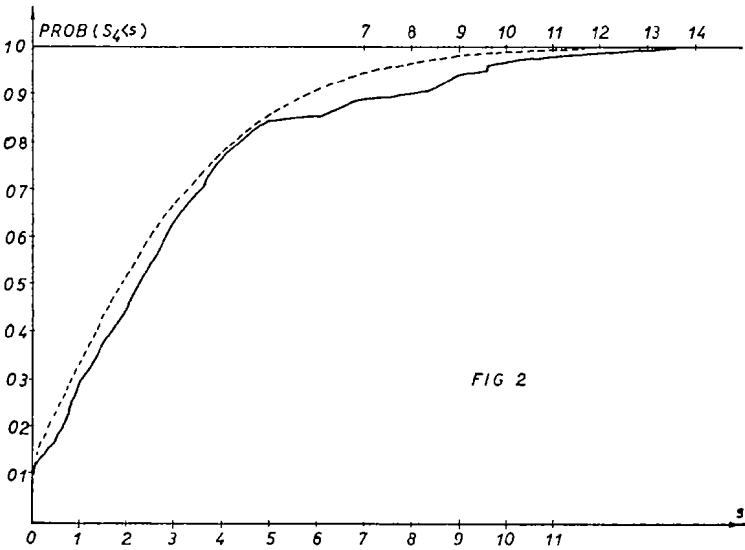
où  $s_j$  est une des variables  $S$  du fichier de base. Les valeurs de  $k$  ont été choisies comme indiqué au tableau ci dessous:

$k$	$p$
4	36
9	36
25	25
100	9
400	4
900	4

Une variable  $S_k$  représente la somme des dégâts pour un effectif de  $k$  contrats pendant la période de référence. Pour obtenir une

image statistique de la fonction de répartition de  $S_k$ , on a effectué 100 simulations de cette variable. Les résultats, classés par ordre de grandeur croissante donnent une image statistique de la fonction de répartition (figure 2, trait continu pour  $k = 4$ ).

En répétant la détermination expérimentale de cette image statistique, on a constaté que les échantillons successifs présentaient une dispersion assez considérable. C'est pourquoi, pour chaque valeur de  $k$ , on a construit  $p$  échantillons (voir tableau ci dessus),



dont on a fait la moyenne arithmétique pour constituer une *image statistique moyenne* de la fonction de répartition de  $S_k$ . Le nombre total de contrats simulés a été imposé par les valeurs maximales de  $k$  et  $p$  choisies ( $900 \times 4 \times 100 = 360\,000$ ).

Plus précisément, on peut remarquer que les cent valeurs de  $S_k$  qui servent à construire une image statistique sont les cent percentiles empiriques, abscisses de l'image statistique où la fréquence relative atteint un pourcentage donné. Pour chacun des percentiles, on fait la moyenne des  $p$  percentiles obtenus pour obtenir le percentile de l'image moyenne. L'image statistique moyenne obtenue pour  $k = 4$  et  $p = 36$  est présentée en traits interrompus à la

figure 2. On constate qu'elle est beaucoup plus régulière que les images statistiques dont elle est la moyenne.

Dans ce qui suit, on n'utilisera plus que les images statistiques moyennes pour résoudre les problèmes posés. En particulier, ces images statistiques moyennes ont été utilisées pour calculer les statistiques suivantes:

$k$	$\bar{S}_k$	$v(S_k)$	$m_3(\bar{S}_k)$	$m_4(S_k)$	$\alpha(S_k)$	$\beta(S_k)$
4	2 5420	2.4703	20 549	181 00	1.3632	4 8604
9	5 7001	3 6429	42 568	619.14	0 88054	3 5157
25	16 079	6 2589	147.87	4849.9	0.60309	3.1604
100	64 310	12.395	553.56	65890	0 29068	2.7914
400	256 09	26.051	3808.0	1281000	0.21540	2.7815
900	576 70	37 318	980.00	5450000	0.01886	2 8100

L'annexe 2 reproduit la table de l'image statistique moyenne obtenue pour  $k = 100, 400, 900$ .

### 3. EXPLOITATION DES RÉSULTATS DE LA SIMULATION

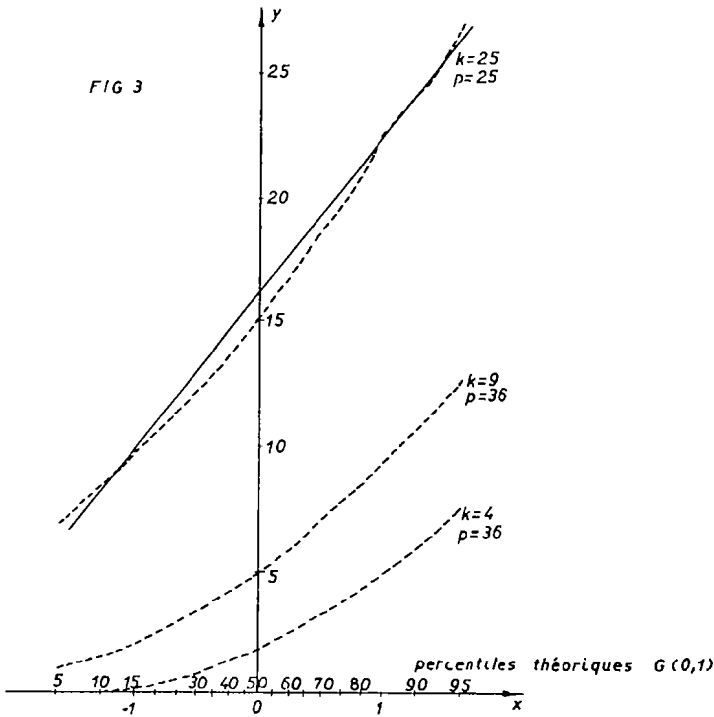
Dans ce qui suit, on décrit les méthodes utilisées, et on note un certain nombre d'observations. On donne très peu de justifications à base théorique.

#### 3.1. Comparaison des fonctions de répartition de $S_k$ , somme des dégâts de $k$ contrats groupés, avec la fonction de répartition d'une loi de Gauss.

Le budget de  $k$  contrats groupés est une somme de  $k$  variables aléatoires identiques et indépendantes. On peut donc s'attendre à pouvoir appliquer les théorèmes de la tendance centrale. Pratiquement, pour un nombre  $k$  donné de contrats, on peut vérifier graphiquement si l'adoption de la loi normale est admissible en utilisant la technique de la droite de Henry.

Celle-ci consiste à représenter dans un système cartésien  $Oxy$  les points de coordonnées  $(x_i, y_i)$  tels que  $x_i$  soit le  $i^{\text{e}}$  percentile de la loi de Gauss-Laplace réduite, et  $y_i$  le même percentile (empirique) de la fonction de répartition particulière étudiée. Dans les graphiques des figures 3, 4 et 5, ces points n'ont été représentés que pour les percentiles de rangs multiples de 5, et pour  $k = 4, 9, 25, 100, 400$  et  $900$ .

Si la fonction de répartition étudiée est effectivement celle d'une loi normale, et si on remplace les percentiles empiriques par les percentiles théoriques sur l'axe  $Oy$ , les points du graphique doivent se trouver sur une droite, qui est la représentation de la fonction de transformation dont il est question dans l'introduction.

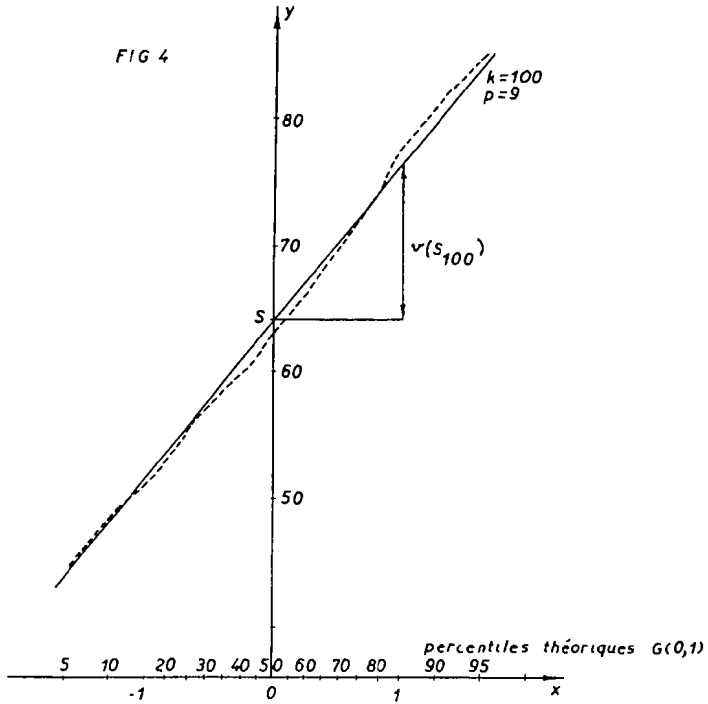


Réciproquement, la fonction de répartition est inconnue, et si les points déduits des percentiles empiriques sont suffisamment alignés, on peut admettre que la loi théorique est une loi normale. La moyenne et l'écart quadratique de cette loi normale peuvent être estimés sur le graphique (voir la fig. 4) ou encore calculés (2.3)

Au vu des graphiques représentés, on peut admettre que pour  $k = 100, 400, 900$  la loi de la somme des dégâts est „pratiquement” normale, tandis que pour  $k = 4, 9, 25$ , l'approximation de la loi réelle par une loi normale est pratiquement à rejeter.

Ceci constitue un exemple pratique de détermination de la valeur

d'un effectif à partir duquel la tendance centrale devient pratiquement utilisable (ce que la théorie n'assure pas).

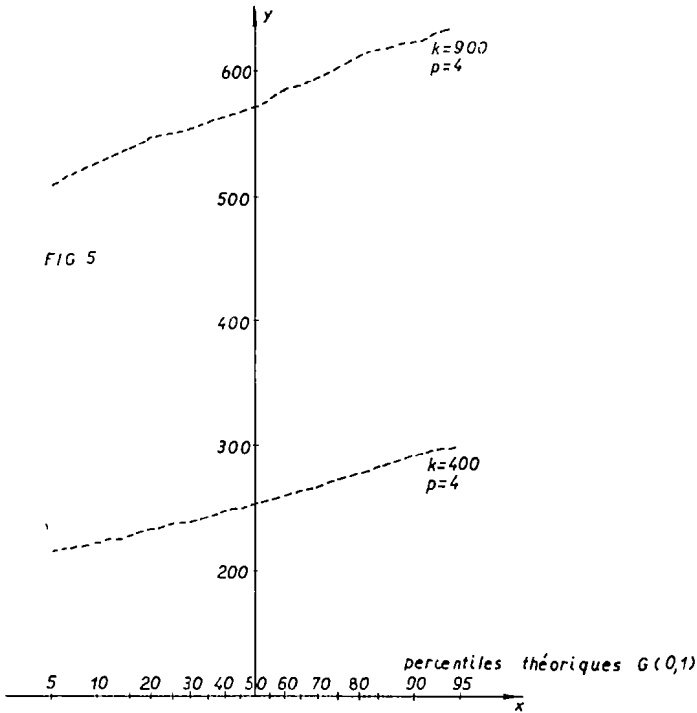


### 3.2. Comparaison des fonctions de répartition de la somme des dégâts de $k$ contrats groupés avec une fonction de répartition empirique de référence.

Au lieu de prendre comme loi de référence une loi de Gauss-Laplace, comme dans le paragraphe précédent, on peut prendre une des lois de la famille étudiée, en l'occurrence la fonction de répartition empirique de la somme des dégâts pour  $k = 100$ . On peut ainsi se dégager complètement de toute considération théorique pour la résolution des problèmes pratiques qui seront envisagés dans la suite.

Dans les graphiques des figures 6 et 7, on a effectué un travail analogue à celui des figures 3, 4 et 5, en portant sur l'axe  $Ox$ , au lieu des percentiles théoriques de la loi normale réduite, les percentiles empiriques de la loi de  $S_{100}$ , somme des dégâts de 100 contrats.

A l'examen de ces graphiques, on peut admettre que la correspondance des percentiles est pratiquement linéaire entre  $k = 100$  d'une part, et  $k = 25, 400$  et  $900$  d'autre part. On peut écrire les



équations d'une droite qui représente cette transformation, en utilisant la méthode des moments; on choisit l'équation

$$y = ax + b$$

avec des coefficients  $a$  et  $b$  tels que les moments empiriques calculés se correspondent effectivement.

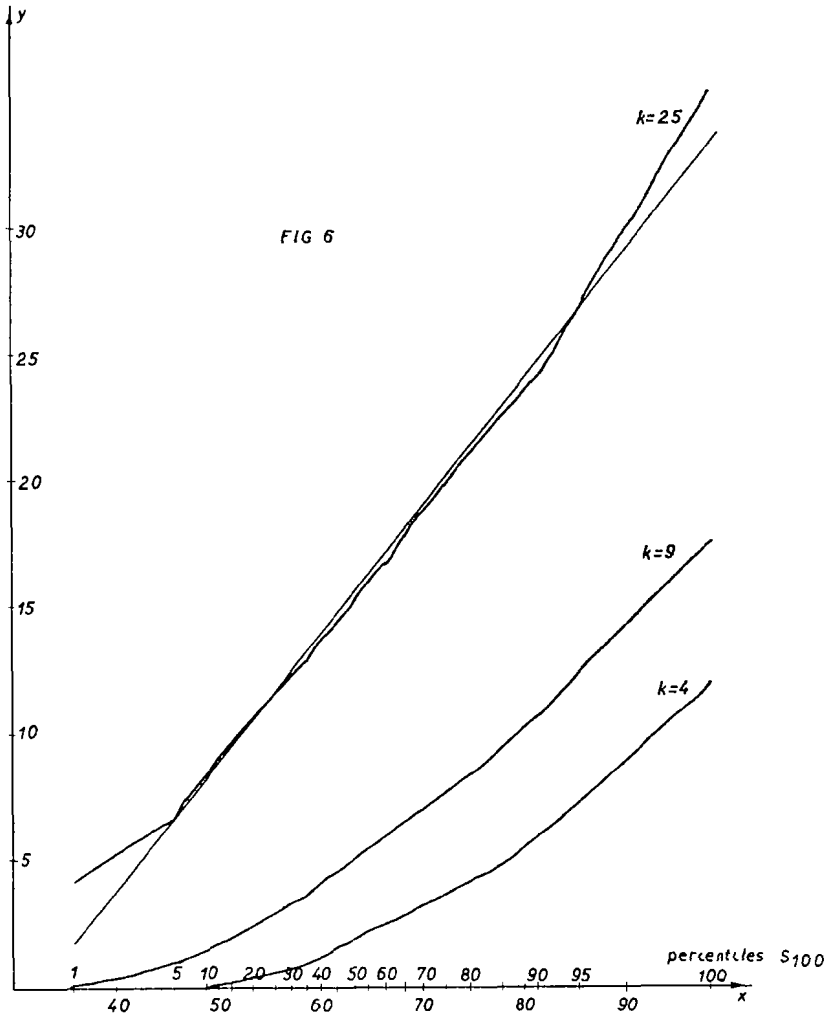
Entre  $S_{100}$  et  $S_k$  on écrit les équations

$$S_k = a \bar{S}_{100} + b$$

$$v(S_k) = a v(S_{100})$$

pour  $k = 25, 400$  et  $900$ , on obtient les coefficients suivants

$k$	$a$	$b$
25	0,505	16,40
400	2,101	121
900	3,01	383

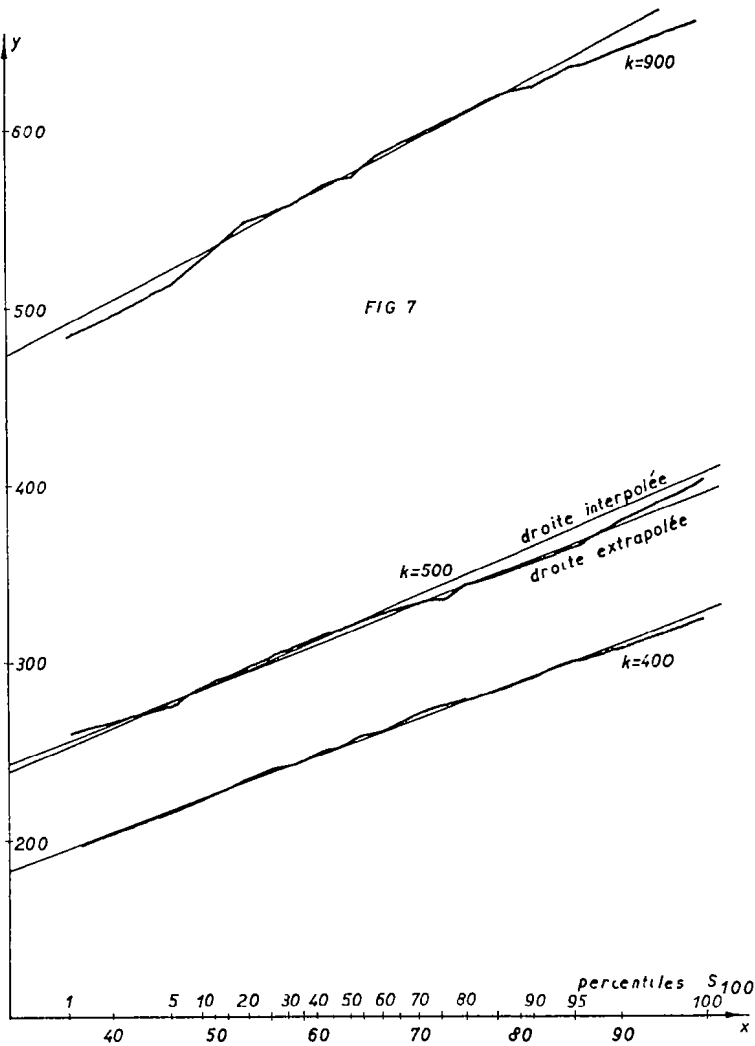


Les droites correspondantes ont été tracées sur les figures 6 et 7. Elles seront utilisées pour résoudre certains problèmes pratiques au paragraphe 3.4.

### 3.3. Utilisation directe d'une image statistique moyenne

#### 3.3.1 Problèmes — types

On prendra comme exemple la variable  $S_{100}$ , dont une table de l'image statistique est donnée en annexe 2. Pour l'utilisation directe



d'une telle table, on considère que chacune des valeurs apparaissant dans la table arrive avec une probabilité de 0,01.

La moyenne et l'écart quadratique empiriques de  $S_{100}$  sont respectivement  $\bar{S}_{100} = 64,31$  et  $v(S_{100}) = 12,40$ .

*Problème 1.* Estimation de la probabilité pour que la somme des dégâts relatifs à 100 contrats dépasse 75 unités: 20 pour cent (ligne 81 de la table).

*Problème 2.* Estimation de la somme des dégâts qui a une probabilité d'être dépassée égale à 5 % : 86

1 % : 98

Il est à remarquer que l'estimation correspondant à une probabilité de 1 % est moins précise que celle qui correspond à 5 %, par suite de la dispersion plus grande qui apparaît dans les „queues” des images statistiques simulées.

*Problème 3.* Détermination approchée (approximation de la méthode des rectangles) du montant de la prime de réassurance „stop loss”.

On suppose par exemple que lorsque la somme des dégâts dépasse 70,74 unités pendant la période de référence (pour l'ensemble des 100 contrats), le réassureur prend à sa charge la partie qui dépasse ce montant. Le montant 70,74 correspond à 110 % de la valeur moyenne 64,31. Dans ce cas, la valeur moyenne de l'intervention du réassureur est de

$$\frac{(70,84 - 70,74)}{100} + \frac{(71,05 - 70,74)}{100} + \dots + \frac{(98,35 - 70,74)}{100} = 2,569$$

ce qui constitue une fraction de 4 % de la moyenne 64,31. La fraction 0,04 est un *taux relatif de stop loss*.

### 3.3.2. Tables des probabilités d'écart défavorables et de taux de stop loss

Pour les problèmes 2 et 3 du paragraphe précédent, on a effectué des calculs systématiques, en fonction d'arguments normalisés, qui sont des excès relatifs à la moyenne empirique: les annexes 3 et 4 donnent, en fonction de  $\rho$  (1ère colonne) et de  $k$  (1ère ligne), respectivement

$$\text{prob } [S_k > S_k (1 + \rho)] \quad (\text{probabilité d'écart défavorables})$$

et la valeur moyenne du *taux relatif de stop loss* lorsque le réassureur prend à sa charge la partie du montant  $S_k$  qui dépasse  $S_k (1 + \rho)$

On peut retrouver dans cette dernière table le résultat calculé à la fin du paragraphe 3.3.1, et faire la constatation importante suivante: *lorsque l'effectif augmente, la probabilité d'un écart défavorable et le taux relatif de stop loss diminuent pour une même valeur de  $\rho$ .*

Ainsi, la probabilité d'un écart défavorable de 10 % passe de 0,36 à 0,29 et à 0,06 lorsque l'effectif passe de  $k = 4$  à  $k = 100$  et  $k = 900$ . Dans les mêmes conditions, le taux relatif de stop loss passe de 0,34 à 0,04 et à 0,0017.

On remarquera cependant que la probabilité des petits écarts défavorables (jusque 20 % environ) commence par croître en fonction de  $k$ , pour décroître ensuite. Ceci est dû à la forte dissymétrie de la loi de  $S$ .

### 3.4. Détermination d'une fonction de répartition intermédiaire à partir de certaines fonctions de répartition simulées.

On se propose de déterminer par exemple une fonction de répartition approchée pour  $S_{500}$ .

#### 3.4.1. Interpolation entre les fonctions de répartition simulées.

On peut interpoler les fonctions de répartition de  $S_{100}$ ,  $S_{400}$  et  $S_{900}$ . Pour cela, on utilise les coefficients d'interpolation de Lagrange. On note  $p_1$ ,  $p_4$  et  $p_9$  les percentiles correspondants pour  $k = 100$ , 400 et 900. Le percentile interpolé pour  $k = 500$  est

$$p_5 = L_1 p_1 + L_4 p_4 + L_9 p_9 \quad (1)$$

avec

$$L_1 = \frac{(5-4)(5-9)}{(1-4)(1-9)} = \frac{-1}{6} = -0,167$$

$$L_4 = \frac{(5-1)(5-9)}{(4-1)(4-9)} = \frac{16}{15} = 1,067$$

$$L_9 = \frac{(5-1)(5-4)}{(9-1)(9-4)} = \frac{1}{10} = 0,1$$

a) Interpolation entre les données brutes des trois simulations. Pour le percentile de rang 10, on trouve

$$p_5 = -0,167 \times 48,76 + 1,067 \times 222,6 + 0,1 \times 526,8 = 282,0$$

(annexe 2)

Dans ce cas, il faut disposer de trois tables de fonctions de répartition simulées, mais il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse de la linéarité de la transformation entre ces trois fonctions de répartition. Cette méthode pourrait servir pour interpoler entre les fonctions de répartition simulées de  $S_4$ ,  $S_9$  et  $S_{25}$  par exemple.

b) Interpolation entre les données des simulations lissées par l'intermédiaire d'une droite de Henry (3.2.)

On prend pour  $p_1$  les percentiles de la table de l'image statistique de la fonction de répartition de  $S_{100}$ , et pour  $p_4$  et  $p_9$  respectivement

$$\begin{aligned} p_4 &= 2,101 p_1 + 121 & (1a) \\ p_9 &= 3,01 p_1 + 383 \end{aligned}$$

Ce sont les valeurs données par les fonctions de transformation calculées au paragraphe 3.2. On trouve ainsi pour le percentile de rang 10,

$$p_1 = 48,76, \quad p_4 = 223,4, \quad p_9 = 529,8 \quad (\text{annexe 2 et formules 1a})$$

et, par la formule (1)

$$p_5 = 283,2$$

Pour appliquer cette méthode, il suffit de disposer d'une seule table (celle de  $S_{100}$ ), mais il faut faire l'hypothèse de la linéarité de la transformation des fonctions de répartition.

Remarque: on peut tracer sur la figure 7 une droite de transformation de la fonction de répartition de  $S_{100}$  vers  $S_{500}$ . Les coefficients  $a$  et  $b$  de celle-ci s'obtiennent par interpolation entre les coefficients des droites relatives à  $S_{100}$  (non tracée),  $S_{400}$  et  $S_{900}$ . On trouve l'équation

$$y = 2,376 x + 167,4 \quad (2)$$

Cette droite est représentée sur la figure 7 (droit interpolé)

### 3.4.2. Extrapolation d'une fonction de répartition simulée

On fait l'hypothèse que les variables  $S_k$  envisagées suivent une loi de Gauss.

a) Equation théorique d'une fonction de transformation.

On note  $G(E, \sigma)$  une loi de Gauss de moyenne  $E$  et écart quadratique  $\sigma$ . Si  $S_{n_1}$  suit une loi  $G(E_1, \sigma_1)$  et  $S_{n_2}$  une loi  $G(E_2, \sigma_2)$ , avec  $n_1 = k^2 n_2$ , on a

$$E_2 = k^2 E_1$$

$$\sigma_2 = k \sigma_1$$

et la droite de transformation de la fonction de répartition de  $S_{n_1}$  vers celle de  $S_{n_2}$  est

$$y = k x + E_1 (k^2 - k) \quad (3)$$

On trouve cette équation en exprimant que les moments de la fonction de répartition transformée doivent être  $E_2$  et  $\sigma_2$ .

b) Transformation de  $S_{100}$  en  $S_{500}$ .

On fait  $k^2 = 5$  dans l'expression (3) et  $E_1 = 63,26$  (valeur calculée à partir de la moyenne de  $S$  sur 54000 contrats). On trouve

$$y = 2,236 x + 174,85 \quad (4)$$

La droite correspondante est représentée sur la figure 7 (droite extrapolée).

Si on l'utilise pour calculer le percentile de rang 10 de  $S_{500}$  à partir de celui de  $S_{100}$ , on trouve

$$y = 283,9$$

Observation. La correspondance remarquable entre ce résultat et ceux du paragraphe 3.4.1 présente un caractère accidentel: la droite interpolée et la droite extrapolée se coupent en effet aux environs du percentile de rang 10. On remarquera dans le tableau du paragraphe 3.4.4. que la correspondance des percentiles de rang 90 est moins bonne.

### 3.4.3. Calcul direct de la loi de $S_{500}$ .

Dans la formule (4) on a utilisé pour  $x$  les percentiles empiriques de la loi de  $S_{100}$ . Ayant fait l'hypothèse de la loi de Gauss, et con-

naissant la moyenne et l'écart quadratique de  $S_{100}$  à partir de ceux de  $S$ , déterminés au paragraphe 2.3., on aurait tout aussi bien pu prendre pour  $x$  les percentiles théoriques de la loi de  $S_{100}$ . Dans ces conditions, il est inutile de passer par l'intermédiaire de la loi de  $S_{100}$ , et on peut déterminer la fonction de répartition de  $S_{100}$  directement à partir de celle de la loi de Gauss réduite  $G(0,1)$ , de la manière suivante:

1° Données: les moments de la loi de Delaporte sont

$$E(N) = 0,6418 \text{ et } \sigma^2(N) = 0,9722$$

les moments de la loi exponentielle sont

$$E(M) = 1 \text{ et } \sigma^2(M) = 1$$

2° Moments de la loi de  $S$  1):

$$E(S) = E(N) * E(M) = 0,6418 \times 1 = 0,6418$$

$$\sigma^2(S) = E(N) \sigma^2(M) + E^2(M) \sigma^2(N)$$

$$= 0,6418 \times 1 + 1^2 \times 0,9722 = 1,6140$$

$$\sigma(S) = \sqrt{1,6140} = 1,2704$$

3° Moments de la loi de  $S_{500}$ :

$$E = 0,6418 \times 500 = 320,9$$

$$\sigma = 1,2704 \times \sqrt{500} = 28,41$$

4° Fonction de transformation de  $G(0,1)$  vers la loi de  $S_{500}$ :

$$y = 28,41 x + 320,9$$

Application: Le percentile théorique de rang 10 de la loi de Gauss réduite  $G(0,1)$  est  $-1,282$ . On en déduit le percentile de même rang de  $S_{100}$  par la transformation

$$y = 28,41 \times (-1,282) + 320,9 = 284,5$$

#### 3.4.4. Comparaison et vérification des méthodes utilisées

On a rassemblé ci-dessous les résultats des calculs faits précédemment pour la loi de  $S_{500}$  et relatifs au percentile de rang 10.

---

1) L. D'HOOGHE et P. E. GENNART. Les risques non-viagers Fonctions actuarielles et tables. 1965.

On y ajoute une colonne, où les mêmes méthodes ont été appliquées pour le percentile de rang 90. La dernière ligne contient les mêmes résultats déduits directement de la loi empirique de  $S_{500}$ , dont les percentiles ont été déterminés par une moyenne de 4 épreuves ( $p = 4$ , voir 2.4). On peut considérer que la correspondance entre les résultats des diverses méthodes est très satisfaisante.

	percentile 10	percentile 90
Interpolation 3 4 1 a	282,0	360,99
Interpolation 3 4 1 b	283,2	360,51
Extrapolation de $S_{100}$	283,9	356,60
Calcul direct 3 4 3.	284,5	357,3
Simulation directe	285,8	356,0

### 3.5. Extension

A condition de conserver la loi de Delaporte pour l'intensité des sinistres, on peut utiliser les résultats numériques de notre étude lorsque le montant des dégâts suit une loi exponentielle de moyenne  $m$  comme unité monétaire au lieu de l'unité; il suffit pour cela de multiplier par  $m$  le montant des dégâts.

### 3.6. Conclusions

La simulation est une opération onéreuse. La seule constitution du fichier de base a demandé 85 heures de travail sur ordinateur IBM 1620. Il faut donc éviter la simulation si le calcul peut la remplacer. Ainsi, nous avons montré que pour les calculs relatifs à la loi de  $S_{500}$  l'utilisation de la loi de Gauss réduite, et des moments déduits des données du problème pouvait donner des résultats *sans aucune simulation*.

Cependant, *la simulation a apporté deux résultats importants*:

1° Elle a permis de déterminer expérimentalement l'effectif à partir du quel l'approximation de la loi de Gauss est admissible (en l'occurrence,  $k \geq 100$ )

2° En dessous de cet effectif, elle permet d'effectuer des calculs prévisionnels sur des fonctions de répartition simulées ou interpolées.

Notons encore que les résultats de la simulation ont mis en évi-

dence l'évolution des écarts défavorables et des taux relatifs de stop loss en fonction de l'effectif.

Remarque finale: dans l'exposé, on a développé à dessein les aspects les plus élémentaires, de façon à faciliter le travail de ceux qui voudraient utiliser effectivement ces méthodes.

ANNEXE I  
UN SEUL CONTRAT  
IMAGE STATISTIQUE DE S. SOMME DES DEGATS  
54000 Epreuves

<i>Classe</i>		<i>Fréquence</i>	<i>Fréq. Relative</i>	<i>Fréq. Rel. Cumulée</i>
<i>De</i>	<i>A</i>			
.00	.00	31506	.583444	.583444
.00	.10	1452	.026888	.610333
.10	.20	1337	.024759	.635092
.20	.30	1311	.024277	.659370
.30	.40	1166	.021592	.680962
.40	.50	1106	.020481	.701444
.50	.60	1052	.019481	.720925
.60	.70	963	.017833	.738759
.70	.80	920	.017037	.755796
.80	.90	851	.015759	.771555
.90	1.00	770	.014259	.785815
1.00	1.10	701	.012981	.798796
1.10	1.20	745	.013796	.812592
1.20	1.30	645	.011944	.824537
1.30	1.40	626	.011592	.836129
1.40	1.50	621	.011500	.847629
1.50	1.60	532	.009851	.857481
1.60	1.70	513	.009500	.866981
1.70	1.80	489	.009055	.876037
1.80	1.90	387	.007166	.883203
1.90	2.00	405	.007500	.890703
2.00	2.10	382	.007074	.897777
2.10	2.20	345	.006388	.904166
2.20	2.30	318	.005888	.910055
2.30	2.40	309	.005722	.915777
2.40	2.50	281	.005203	.920981
2.50	2.60	280	.005185	.926166
2.60	2.70	235	.004351	.930518
2.70	2.80	234	.004333	.934851
2.80	2.90	212	.003925	.938777
2.90	3.00	182	.003370	.942148
3.00	3.10	188	.003481	.945629
3.10	3.20	202	.003740	.949370
3.20	3.30	168	.003111	.952481
3.30	3.40	139	.002574	.955055

ANNEXE I  
UN SEUL CONTRAT  
IMAGE STATISTIQUE DE S, SOMME DES DEGATS  
54000 Epreuves

<i>Classe</i>		<i>Fréquence</i>	<i>Fréq. Relative</i>	<i>Fréq. Rel Cumulée</i>
De	A			
3.40	3.50	157	.002907	.957962
3.50	3.60	147	.002722	.960685
3.60	3.70	135	.002500	.963185
3.70	3.80	116	.002148	.965333
3.80	3.90	127	.002351	.967685
3.90	4.00	98	.001814	.969499
4.00	4.10	95	.001759	.971259
4.10	4.20	101	.001870	.973129
4.20	4.30	87	.001611	.974740
4.30	4.40	73	.001351	.976092
4.40	4.50	98	.001814	.977907
4.50	4.60	62	.001148	.979055
4.60	4.70	55	.001018	.980074
4.70	4.80	70	.001296	.981370
4.80	4.90	53	.000981	.982351
4.90	5.00	57	.001055	.983407
5.00	5.10	54	.001000	.984407
5.10	5.20	48	.000888	.985296
5.20	5.30	43	.000796	.986092
5.30	5.40	57	.001055	.987148
5.40	5.50	50	.000925	.988074
5.50	5.60	44	.000814	.988888
5.60	5.70	39	.000722	.989611
5.70	5.80	30	.000555	.990166
5.80	5.90	34	.000629	.990796
5.90	6.00	31	.000574	.991370
6.00	6.10	26	.000481	.991851
6.10	6.20	37	.000685	.992537
6.20	6.30	23	.000425	.992962
6.30	6.40	28	.000518	.993481
6.40	6.50	19	.000351	.993833
6.50	6.60	21	.000388	.994222
6.60	6.70	16	.000296	.994518
6.70	6.80	17	.000314	.994833
6.80	6.90	12	.000222	.995055
6.90	7.00	17	.000314	.995370
7.00	7.10	11	.000203	.995574
7.10	7.20	16	.000296	.995870
7.20	7.30	11	.000203	.996074
7.30	7.40	10	.000185	.996259
7.40	7.50	10	.000185	.996444
7.50	7.60	7	.000120	.996574

## ANNEXE I

UN SEUL CONTRAT  
 IMAGE STATISTIQUE DE S, SOMME DE DEGATS  
 54000 Epreuves

Classe		Fréquence	Fréq. Relative	Fréq. Rel. Cumulée
De	A			
7.60	7.70	9	.000166	.996740
7.70	7.80	15	.000277	.997018
7.80	7.90	3	.000055	.997074
7.90	8.00	8	.000148	.997222
8.00	8.10	6	.000111	.997333
8.10	8.20	4	.000074	.997407
8.20	8.30	4	.000074	.997481
8.30	8.40	9	.000166	.997648
8.40	8.50	7	.000129	.997777
8.50	8.60	6	.000111	.997888
8.60	8.70	5	.000092	.997981
8.70	8.80	5	.000092	.998074
8.80	8.90	6	.000111	.998185
8.90	9.00	4	.000074	.998259
9.00	9.10	3	.000055	.998314
9.10	9.20	3	.000055	.998370
9.20	9.30	5	.000092	.998462
9.30	9.40	6	.000111	.998574
9.40	9.50	5	.000092	.998666
9.50	9.60	4	.000074	.998740
9.60	9.70	2	.000037	.998777
9.70	9.80	6	.000111	.998888
9.80	9.90	3	.000055	.998944
9.90	10.00	3	.000055	.998999
10.00	10.10	5	.000092	.999092
10.10	10.20	10	.000185	.999277
10.20	10.30	1	.000018	.999296
10.30	10.40	4	.000074	.999370
10.40	10.50	3	.000055	.999425
10.50	10.60	1	.000018	.999444
10.60	10.70	3	.000055	.999499
10.70	10.80	2	.000037	.999537
10.80	10.90	0	.000000	.999537
10.90	11.00	2	.000037	.999574
11.00	11.10	3	.000055	.999629
11.10	11.20	0	.000000	.999629
11.20	11.30	1	.000018	.999648
11.30	11.40	0	.000000	.999648
11.40	11.50	1	.000018	.999666
11.50	11.60	1	.000018	.999685
11.60	11.70	2	.000037	.999722
11.70	11.80	0	.000000	.999722

ANNEXE I  
UN SEUL CONTRAT  
IMAGE STATISTIQUE DE S, SOMME DES DEGATS  
54000 Epreuves

Classe	Fréquence	Freq. Relative	Fréq. Rel. Cumulée
De 11.80	A 11.90	0	.000000
11.90	12.00	0	.000000
12.00	12.10	4	.000074
12.10	12.20	1	.000018
12.20	12.30	0	.000000
12.30	12.40	0	.000000
12.40	12.50	1	.000018
12.50	12.60	0	.000000
12.60	12.70	0	.000000
12.70	12.80	0	.000000
12.80	12.90	0	.000000
12.90	13.00	0	.000000
13.00	13.10	0	.000000
13.10	13.20	0	.000000
13.20	13.30	1	.000019
13.30	13.40	0	.000000
13.40	13.50	1	.000018
13.50	13.60	1	.000018
13.60	13.70	1	.000018
13.70	13.80	0	.000000
13.80	13.90	1	.000018
13.90	14.00	0	.000000
14.00	14.10	0	.000000
14.20	14.20	0	.000000
14.20	14.30	2	.000037
14.30	14.40	1	.000018
14.40	14.50	1	.000018
14.50	14.60	0	.000000
14.60	14.70	0	.000000
14.70	14.80	0	.000000
14.80	14.90	0	.000000
14.90	15.00	0	.000000

## ANNEXE 2

## MOYENNE IMAGE STATISTIQUE

	$P = 9$ $K = 100$	$P = 4$ $K = 400$	$P = 4$ $K = 900$
1	35.810937	194.381850	483.857800
2	40.457026	203.158040	494.814620
3	42.173830	208.227450	501.108070
4	43.205140	212.399570	507.327900

## ANNEXE 2

## MOYENNE IMAGE STATISTIQUE

	$P = 9$ $K = 100$	$P = 4$ $K = 400$	$P = 4$ $K = 900$
5	44.443374	215.095620	511.736470
6	45.755113	216.949550	517.458950
7	46.688143	217.610520	520.147000
8	47.433847	219.310810	522.469820
9	48.098112	221.124630	523.384920
10	48.756672	222.607480	526.786120
11	49.306315	224.537220	527.900600
12	49.829517	225.944640	529.955100
13	50.392770	226.525470	534.871270
14	50.794502	227.392340	537.341370
15	51.344973	228.709150	538.542650
16	51.799667	229.923850	541.722900
17	52.081677	231.222370	542.395400
18	52.367562	232.355230	543.498020
19	52.968056	232.999740	545.723750
20	53.318453	233.248880	547.052320
21	53.879375	233.796510	548.374770
22	54.234845	234.418390	548.998620
23	54.815687	235.932770	549.940170
24	55.197748	237.020190	550.965970
25	55.556980	237.320640	551.343470
26	55.752641	237.782560	551.961300
27	56.127717	238.514690	552.837370
28	56.517837	239.332310	553.977070
29	57.050903	239.920730	555.335500
30	57.309046	240.630640	555.552450
31	57.467345	241.454390	558.169370
32	57.760184	242.213080	559.452170
33	57.934370	243.125600	560.463720
34	58.379060	243.245600	560.925570
35	58.695560	244.454320	561.247320
36	59.062500	245.442010	562.321850
37	59.302428	246.337150	563.366500
38	59.515447	246.449030	564.506320
39	59.801793	247.437770	565.154870
40	60.031300	248.124280	565.715950
41	60.303512	248.270330	566.688550
42	60.560064	248.559440	567.160650
43	60.902626	249.243910	567.557900
44	61.213005	249.942670	568.044550
45	61.660194	250.677120	569.718900
46	61.909792	251.621120	569.981950
47	62.218021	252.274100	570.986100
48	62.454640	252.634200	571.470700
49	62.688465	253.558800	572.181720

## ANNEXE 2

## MOYENNE IMAGE STATISTIQUE

	$P = 9$ $K = 100$	$P = 4$ $K = 400$	$P = 4$ $K = 900$
50	63.281537	254.364600	573.246400
51	63.442167	254.854150	575.778500
52	63.780960	255.475650	577.061800
53	64.155385	256.172050	577.682500
54	64.361370	256.979270	578.308150
55	64.596761	257.879070	578.827900
56	64.986747	258.825150	580.235870
57	65.312670	259.076050	581.165050
58	65.573835	259.587920	582.395100
59	66.064563	259.973470	583.981670
60	66.409206	260.851450	586.163400
61	66.811998	261.286420	586.980200
62	67.167274	261.777750	587.568300
63	67.585756	262.279250	588.269150
64	67.870540	263.571520	588.996200
65	68.235498	264.769520	590.505070
66	68.660640	265.318700	591.353350
67	69.087292	266.968570	592.198700
68	69.484280	267.368770	592.728650
69	69.724957	267.954070	593.667950
70	70.101411	268.842850	594.862800
71	70.462124	269.845420	595.904020
72	70.842231	270.402900	597.610970
73	71.054620	271.172420	599.834170
74	71.394507	271.760400	601.919970
75	72.221943	273.256020	602.954800
76	72.562167	274.205970	604.942720
77	73.005240	274.817150	605.311570
78	73.981650	275.543600	606.776520
79	74.365360	276.939600	607.502750
80	74.730391	277.878170	609.338620
81	75.221394	279.142450	611.430430
82	75.990143	280.328420	613.053670
83	76.529105	281.027650	614.701750
84	77.062385	281.464370	615.174820
85	77.792913	282.493050	618.008920
86	78.161836	283.778820	618.507750
87	78.643232	286.053600	619.402400
88	79.271936	288.122000	619.651770
89	80.366588	289.826050	621.163870
90	81.280561	292.627520	623.272720
91	82.014604	294.122350	625.710100
92	82.335445	295.937350	628.114620
93	83.172634	295.996720	629.484250
94	84.217065	296.820050	631.224600

## ANNEXE 2

## MOYENNE IMAGE STATISTIQUE

	$P = 9$ $K = 100$	$P = 4$ $K = 400$	$P = 4$ $K = 900$
95	85.329858	298.403600	635.040100
96	86.798047	301.986470	639.847370
97	88.541006	305.571350	647.587120
98	89.685274	312.246570	654.257820
99	93.553544	317.582720	658.976400
100	98.349090	323.612220	668.641270

## ANNEXE 3

## PROBABILITES D' ECARTS DEFAVORABLES

	$K = 4$	$K = 9$	$K = 25$	$K = 100$	$K = 400$	$K = 900$
.00	.39	.43	.45	.47	.48	.49
.01	.39	.42	.44	.45	.45	.42
.02	.38	.42	.43	.42	.40	.38
.03	.38	.41	.42	.41	.36	.31
.04	.38	.41	.41	.39	.34	.28
.05	.37	.40	.40	.38	.30	.23
.06	.37	.39	.39	.36	.27	.20
.07	.37	.39	.38	.34	.25	.16
.08	.36	.38	.37	.33	.22	.11
.09	.36	.38	.37	.31	.20	.08
.10	.36	.38	.36	.29	.16	.06
.11	.35	.37	.35	.27	.14	.04
.12	.35	.36	.35	.26	.13	.04
.13	.35	.36	.34	.24	.12	.03
.14	.35	.35	.33	.23	.11	.02
.15	.34	.35	.32	.23	.09	0.00
.16	.34	.34	.31	.21	.06	
.17	.34	.34	.30	.19	.05	
.18	.33	.34	.29	.19	.04	
.19	.33	.33	.29	.18	.03	
.20	.33	.32	.28	.16	.03	
.21	.32	.32	.27	.15	.03	
.22	.32	.31	.27	.14	.02	
.23	.32	.31	.26	.13	.02	
.24	.31	.31	.25	.12	.02	
.25	.31	.30	.24	.11	0.00	
.26	.31	.30	.24	.11		
.27	.30	.29	.23	.10		
.28	.30	.29	.22	.09		
.29	.30	.28	.22	.08		
.30	.29	.27	.21	.07		
.31	.29	.27	.20	.06		
.32	.29	.27	.20	.06		
.33	.29	.26	.19	.05		

## ANNEXE 3

## PROBABILITES D'ECARTS DEFAVORABLES

	$K = 4$	$K = 9$	$K = 25$	$K = 100$	$K = 400$	$K = 900$
.34	.28	.26	.19	.05		
.35	.28	.26	.19	.04		
.36	.28	.25	.18	.04		
.37	.28	.25	.18	.04		
.38	.27	.24	.17	.03		
.39	.27	.24	.16	.03		
.40	.27	.24	.16	.02		
.41	.27	.23	.15	.02		
.42	.26	.23	.15	.02		
.43	.26	.22	.14	.02		
.44	.26	.22	.14	.02		
.45	.26	.22	.13	.02		
.46	.25	.21	.13	0.00		
.47	.25	.21	.12			
.48	.25	.20	.12			
.49	.25	.20	.11			
.50	.24	.19	.11			
.55	.23	.18	.09			
.60	.22	.17	.07			
.65	.21	.16	.06			
.70	.20	.15	.05			
.75	.19	.13	.04			
.80	.18	.12	.04			
.85	.17	.11	.03			
.90	.16	.10	.03			
.95	.15	.09	.02			
1.00	.14	.08	.02			
1.05	.14	.08				
1.10	.13	.07				
1.15	.12	.06				
1.20	.12	.06				
1.25	.11	.05				
1.30	.11	.04				
1.35	.10	.04				
1.40	.10	.03				
1.45	.09	.03				
1.50	.09	.03				
1.60	.08	.02				
1.70	.07	.02				
1.80	.06					
1.90	.05					
2.00	.05					
2.10	.04					
2.20	.04					
2.30	.03					
2.40	.03					

## ANNEXE 3

## PROBABILITES D' ECARTS DEFAVORABLES

	$K = 4$	$K = 9$	$K = 25$	$K = 100$	$K = 400$	$K = 900$
2.50	.03					
2.60	.02					
2.70	.02					
2.80	.02					

## ANNEXE 4

## TAUX RELATIF DE STOP LOSS

	$K = 4$	$K = 9$	$K = 25$	$K = 100$	$K = 400$	$K = 900$
.00	.3765310	.2543780	.1556800	.0775030	.0409380	.0260120
.02	.3687800	.2459150	.1468960	.0685930	.0321320	.0174290
.04	.3611800	.2376900	.1385180	.0604040	.0248730	.0110690
.06	.3537220	.2296910	.1304990	.0528960	.0187600	.0063680
.08	.3463650	.2218910	.1228360	.0460660	.0138790	.0033110
.10	.3391650	.2142910	.1154460	.0399620	.0100020	.0017010
.12	.3320760	.2069000	.1083520	.0345960	.0071190	.0007950
.14	.3250760	.1997410	.1015860	.0297300	.0047510	.0002210
.16	.3182670	.1927430	.0951440	.0252630	.0029690	
.18	.3115480	.1859430	.0890720	.0213450	.0019240	
.20	.3049480	.1793500	.0832960	.0178460	.0012310	
.22	.2984690	.1729610	.0778240	.0147950	.0006380	
.24	.2921050	.1667610	.0726640	.0122400	.0002380	
.26	.2859050	.1607180	.0677780	.0099430		
.28	.2798300	.1548660	.0631950	.0079510		
.30	.2738540	.1492660	.0588300	.0064150		
.32	.2680540	.1438660	.0547370	.0051190		
.34	.2622780	.1385820	.0508430	.0040510		
.36	.2566780	.1334460	.0471400	.0031540		
.38	.2511750	.1284680	.0436230	.0023860		
.40	.2457750	.1236680	.0403420	.0018400		
.42	.2404620	.1190390	.0372940	.0014400		
.44	.2352620	.1145540	.0344200	.0010400		
.46	.2301490	.1102510	.0317680	.0008000		
.48	.2251490	.1060640	.0292960			
.50	.2201980	.1020670	.0270790			
.52	.2153980	.0982670	.0250350			
.54	.2106540	.0944720	.0230350			
.56	.2060540	.0908720	.0212250			
.58	.2015360	.0873310	.0195400			
.60	.1971360	.0839310	.0179700			
.62	.1927710	.0806210	.0165700			
.64	.1885710	.0774210	.0152240			
.66	.1843710	.0742210	.0140240			
.68	.1803410	.0712180	.0128880			
.70	.1763410	.0682180	.0118880			

## ANNEXE 4

## TAUX RELATIF DE STOP LOSS

	$K = 4$	$K = 9$	$K = 25$	$K = 100$	$K = 400$	$K = 900$
.75	.1667070	.0612830	.0094120			
.80	.1575780	.0549650	.0074120			
.85	.1488900	.0490940	.0058120			
.90	.1407160	.0438410	.0043120			
.95	.1328840	.0389410	.0032490			
1.00	.1254980	.0345350	.0022490			
1.05	.1184980	.0305350				
1.10	.1119000	.0269620				
1.15	.1054540	.0237110				
1.20	.0994540	.0207110				
1.30	.0880160	.0158580				
1.40	.0778030	.0120360				
1.50	.0687040	.0090360				
1.60	.0605590	.0068400				
1.70	.0534050	.0048400				
1.80	.0471580					
1.90	.0411620					
2.00	.0361620					
2.20	.0273440					
2.40	.0204040					
2.60	.0151180					
2.80	.0111180					
2.98	0.0000000					