CONTRIBUTION A L'ETUDE DU BONUS POUR NON SINISTRE EN ASSURANCE AUTOMOBILE

P. THYRION
Belgique

I. INTRODUCTION

1. La sélection des risques est un des premiers principes fondamentaux que la théorie de l'assurance a dégagés. Il se traduit essentiellement par la répartition des risques en classes de tarif homogènes et il prémunit l'assureur contre le danger de voir „le mauvais risque chasser le bon".

Pour créer des classes de tarif homogènes, il faut théoriquement repérer tous les facteurs influençant le risque et en chiffrer l'effet. Si cela est fait, la fluctuation des résultats individuels autour de la moyenne n'est que l'effet accidentel du hasard et ne peut donner lieu a posteriori à rectification de la prime: il n'y a rien d'inéquitable à ce que les titulaires des contrats non sinistrés paient pour les autres puisque tous sont égaux devant le risque.

Comme dans toute science appliquée, la mise en oeuvre des principes se heurte parfois à de grandes difficultés d'exécution. Dans la pratique il n'est généralement pas question de repérer tous les facteurs du risque, mais seulement les principaux, ne fût-ce qu'en raison de l'impossibilité de conduire des études statistiques valables sur une multitude de groupes peu étoffés. On ne peut donc faire grief au praticien d'estimer qu'il a créé des classes homogènes lorsque celles-ci tiennent compte des principaux facteurs de risque.

Mais l'optique change si, pour l'une ou l'autre raison qu'il importe peu de préciser, le tarif néglige un ou des facteurs dont le bon sens et l'expérience — à défaut du calcul — prouvent l'influence appréciable. Il n'est pas illégitime alors de l'inspirer des résultats individuels constatés pour améliorer une tarification dont on savait, sans pouvoir la chiffrer, l'imperfection a priori: une telle politique tarifaire est connue dans l'assurance sous le nom trop restrictif de

„bonus pour non sinistre". Tour à tour pratiquée, controversée ou répudiée dans divers pays et dans diverses branches, cette politique mérite plus que les seules considérations commerciales, administratives ou pseudo-techniques dont elle a souvent été entourée. La théorie mathématique des assurances non-viagères permet d'aborder l'étude théorique du „bonus pour non sinistre", que des statistiques suffisamment fouillées pourraient contribuer à asseoir.

Cette note expose les premiers résultats d'un essai entrepris dans ce sens et dans le domaine de l'assurance automobile.

2. Mais auparavant, il convient tout de même de se demander — dans l'esprit de ce qui a été dit ci-dessus — s'il existe au moins un certain fondement logique à la base d'une politique de bonus en assurance automobile.

Les facteurs prépondérants du risque sont:

— les caractéristiques du véhicule (puissance, dimensions, etc.);

— l'usage qui en est fait (y compris notamment la zone de circulation;

— les facteurs propres au conducteur (profession, qualités physiques et morales, expérience, etc.).

En général — et c'est le cas en Belgique — les classes de tarif tiennent compte d'une caractéristique de puissance du véhicule (cylindrée ou bien force fiscale), de l'usage qui en est fait (tourisme et affaires, transport pour compte propre, transport pour compte d'autrui, etc...), parfois aussi de l'un ou l'autre facteur propre au conducteur (profession). Mais elles ne tiennent pas ou pratiquement pas compte des qualités physiques et morales du conducteur. Or les études faites — par les organismes de prévention routière et par la police de la route notamment — indiquent qu'un pourcentage élevé d'accidents est dû à des imprudences, à la méconnaissance ou au non respect du code de la route, à des déficiences physiques, à l'ivresse, etc..., bref au comportement même du conducteur.

Un facteur important du risque n'est donc pratiquement pas pris en considération dans la tarification a priori. Il n'est donc pas déraisonnable de se demander si — à défaut de mieux — il ne conviendrait pas d'essayer d'en tenir compte a posteriori.

II. Elements de Theorie

1. *Position probabiliste du problème*

Soit $X(t)$ le coût total des sinistres pendant un intervalle de temps de durée t, pour un risque d'une classe de tarif déterminée. $X(t)$ est une fonction aléatoire de t; soit $F(x; t)$ sa fonction de répartition, dépendant de divers paramètres. $E[X(t)]$, espérance mathématique de $X(t)$, est la prime pure pour une période de durée t.

Si la classe de tarif n'est pas homogène, c'est que les paramètres dont dépend $F(x; t)$ ne sont pas constants d'un risque à l'autre. On peut alors concevoir que l'ensemble des risques de la classe considérée se répartit en groupes homogènes c'est-à-dire tels qu'à l'intérieur de chacun d'eux chacun des paramètres prend une valeur constante bien déterminée. Un risque quelconque choisi au hasard parmi l'ensemble des risques de la classe a une certaine probabilité a priori d'appartenir à un groupe déterminé. Cette conception de l'hétérogénéité se traduit en probabilité par le fait que les paramètres dont dépend $F(x; t)$ sont eux-mêmes des variables aléatoires.

Pour la simplicité des écritures, supposons qu'un seul paramètre λ soit une variable aléatoire dont la fonction de répartition a priori est $U(\lambda)$ dans le domaine certain $D(\lambda)$. $U(\lambda)$ est la „fonction de structure" qui mathématise l'hétérogénéité de la classe; et l'on a

$$F(x; t) = \int_{D(\lambda)} F(x; t, \lambda)\, dU(\lambda)$$

Si une observation H_α a été faite sur la valeur prise par la variable $X(\alpha)$ au cours d'une période de durée α pour un risque déterminé et si l'on désire tenir compte de cette observation pour apprécier ce même risque pendant une période d'assurance t subséquente, on considérera que l'observation H_α modifie, pour le risque considéré, la loi de probabilité a priori $U(\lambda)$ du paramètre aléatoire. Cette loi devient $U(\lambda|H_\alpha)$ qui s'exprime par la formule de Bayes. La fonction de répartition de la variable $X({}_{\alpha|}t|H_\alpha)$ devient $F(x; {}_{\alpha|}t|H_\alpha)$ et permet de calculer l'espérance mathématique a posteriori $E[X({}_{\alpha|}t|H_\alpha)]$.

Les valeurs du rapport $\dfrac{E[X({}_{\alpha|}t|H_\alpha)]}{E[X(t)]}$ dans les diverses hypothèses H_α peuvent servir de base quantitative à une politique dite de „bonus pour non sinistre".

Explicitons ces expressions dans le cas de l'assurance automobile.

2. *Schéma stochastique applicable à l'assurance automobile*

La fonction aléatoire $X(t)$, coût total des sinistres pour un risque déterminé pendant l'intervalle de temps $(0, t)$, dépend des deux variables aléatoires:

$N(t)$ nombre de sinistres pendant l'intervalle de temps de durée t,
Y coût d'un sinistre déclaré.

On ne peut espérer bâtir un schéma mathématique représentant un phénomène réel complexe sans poser diverses hypothèses simplificatrices. Ces hypothèses qui doivent conduire à un schéma simplifié mais plausible sont dictées par le bon sens, par les limitations mathématiques dans l'étude théorique et aussi par la possibilité de vérifier expérimentalement l'accord entre le modèle et la réalité. La théorie des processus stochastiques met à la disposition des praticiens une gamme de schémas toujours plus affinés. Malheureusement les statistiques tirées des portefeuilles d'assurance ne permettent que rarement de vérifier la valeur pratique de schémas compliqués. Il en est particulièrement ainsi lorsqu'il s'agit de s'assurer de la dépendance ou de l'indépendance entre deux variables. Ainsi dans le cas de l'assurance automobile, il serait normal de supposer en première analyse que la variable Y, coût d'un sinistre déclaré, dépend du nombre de sinistres déjà déclarés précédemment. Nos statistiques ne nous ont pas permis d'étudier la corrélation éventuelle entre ces deux variables. Dans le cadre de cette note, il ne sert donc à rien d'introduire une telle dépendance.

Nous supposerons donc, et ce sera la première hypothèse simplificatrice, que $S(y)$, fonction de répartition de la variable Y, est indépendante de l'époque à laquelle se produit le sinistre considéré ainsi que de l'évolution antérieure du processus.

Quant à $N(t)$ c'est une variable entière non négative dont la loi de probabilité est définie par $P[N(t)=n]$ que nous noterons $P(n; t)$.

En première approximation, on considère souvent que le risque automobile est un risque „constant", c'est-à-dire que la probabilité élémentaire qu'il se produise un sinistre et un seul pendant l'intervalle de temps $(t, t+dt)$ est égale à $\lambda . dt$; λ, taux instantané de sinistre, étant une constante; la probabilité qu'il se produise plus d'un sinistre est supposée d'ordre supérieur à dt, c'est-à-dire en fait négligeable.

On sait qu'une telle hypothèse conduit pour la variable $N(t)$ à la loi de Poisson $P(n;t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Cette hypothèse est raisonnable si le risque ne varie pas systématiquement dans le temps. Certes, le risque automobile connaît des pointes saisonnières, journalières et même horaires, et le taux instantané de sinistre serait mieux représenté par une fonction périodique du temps $\lambda(t)$. Mais, comme on n'envisage en pratique que des nombres entiers de périodes (années) d'assurance, il n'y a pas d'objection majeure à prendre λ constant, éventuellement égal à $\int_0^1 \lambda(t)\,dt$, pour autant que la classe de tarif envisagée soit homogène.

S'il n'en est pas ainsi, on peut considérer que cette classe se subdivise en groupes homogènes à l'intérieur de chacun desquels la loi de probabilité de la variable $N(t)$ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda.t$, λ variant de groupe en groupe. Bref l'hétérogénéité se traduit par le fait que le taux instantané de sinistre est une variable aléatoire Λ dont la fonction de répartition est $U(\lambda)$ dans le domaine $(0, \infty)$.

La loi de probabilité de la variable $N(t)$ est alors une loi de Poisson composée

$$P(n;t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,dU(\lambda).$$

La fonction de répartition de la variable $X(t)$ s'écrit

$$F(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n;t)\, S^{*n}(x)$$

où $S^{*n}(x)$ est la fonction de répartition de la somme de n sinistres indépendants, c'est-à-dire la convoluée d'ordre n de $S(x)$, qui s'obtient par la formule de récurrence

$$S^{*n}(x) = \int_0^\infty S^{*n-1}(x-u)\,dS(u)$$

avec

$$S^{*0}(x) = 1$$

Il vient alors

$$E[X(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(n;t)\, n\, E(Y)$$

$$= E[N(t)].E(Y)$$

et

$$E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, dU(\lambda)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \lambda t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dU(\lambda)$$

$$= t \int_0^\infty \lambda dU(\lambda) = t\, E(\Lambda)$$

On obtient de même

$$E[N^2(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} P(n;t)\, n^2 = t^2\, E(\Lambda^2) + t\, E(\Lambda)$$

et

$$\sigma^2[N(t)] = t^2\, \sigma^2\,(\Lambda) + t\, E(\Lambda)$$

qui est toujours supérieur à $E[N(t)]$ sauf si Λ est une constante.

Soit H_α une observation faite sur la valeur prise par $N(\alpha)$ au cours d'une expérience de durée α. Compte tenu de cette observation, l'espérance mathématique a posteriori de la variable $X({}_{\alpha|}t)$ pour une nouvelle période de durée t succédant à la première s'écrit

$$E[X({}_{\alpha|}t \mid H_\alpha)] = E[N({}_{\alpha|}t \mid H_\alpha)].E(Y)$$

puisque la variable Y a été supposée indépendante de $N(t)$.

La loi de probabilité de $N({}_{\alpha|}t \mid H_\alpha)$ est donnée par

$$P[N({}_{\alpha|}t) = n \mid H_\alpha] = \frac{P[N({}_{\alpha|}t) = n\,;H_\alpha]}{P(H_\alpha)} = \frac{\int_0^\infty P[N({}_{\alpha|}t) = n\,; H_\alpha|\lambda]\, dU(\lambda)}{P(H_\alpha)}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\, P(H_\alpha \mid \lambda)\, d\, U(\lambda)}{P(H_\alpha)}$$

car pour une valeur déterminée de λ, la variable $N\ ({}_{\alpha|}t|\lambda)$ obéit à une loi de Poisson pure et est donc indépendante des événements survenus pendant la période α distincte de t.

Il vient alors:

$$E[N({}_{\alpha|}t|H_\alpha)] = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} P(H_\alpha|\lambda)\, d\, U(\lambda)}{P(H_\alpha)}$$

$$= \frac{t \int_0^\infty \lambda\, P(H_\alpha|\lambda)\, dU(\lambda)}{P(H_\alpha)}$$

Comme la fonction de structure a posteriori, compte tenu de H_α, est donnée par la formule de Bayes

$$d\, U(\lambda|H_\alpha) = \frac{P(H_\alpha|\lambda)\, d\, U(\lambda)}{P(H_\alpha)}$$

l'expression de E peut s'écrire plus simplement

$$E[N({}_{\alpha|}t|H_\alpha)] = t \int_0^\infty \lambda\, d\, U(\lambda|H_\alpha) = t\,.E(\Lambda|H_\alpha)$$

La question se ramène ainsi à comparer $E(\Lambda|H_\alpha)$ à $E(\Lambda)$.

3. *Expression de* $E(\Lambda|H_\alpha)$

Les calculs se menant toujours de la même manière, nous nous bornerons à expliciter $E(\Lambda|H_\alpha)$ dans deux hypothèses intéressantes en pratique.

Soit $H_\alpha \equiv [N(\alpha) = \nu]$, ν entier non négatif.

On a alors:

$$d\, U(\lambda|N(\alpha) = \nu) = \frac{P[N(\alpha) = \nu|\lambda]\, d\, U(\lambda)}{P[N(\alpha) = \nu]}$$

$$= \frac{e^{-\lambda\alpha} \frac{(\lambda\alpha)^\nu}{\nu!}\, d\, U(\lambda)}{P(\nu\,;\,\alpha)}$$

D'où

$$E[\Lambda|N(\alpha) = \nu] = \frac{\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda\alpha} \frac{(\lambda\alpha)^\nu}{\nu!}\, dU(\lambda)}{P(\nu\,;\,\alpha)}$$

$$= \frac{\nu+1}{\alpha}\, \frac{P(\nu+1\,;\,\alpha)}{P(\nu\,;\,\alpha)}$$

Le cas $H_\alpha \equiv [N(\alpha) > \nu]$ donnerait de même

$$d\,U(\lambda|N(\alpha)>\nu) = \frac{\left[(1 - e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\alpha}\,.\,\lambda\alpha - \ldots . - e^{-\lambda\alpha}\dfrac{(\lambda\alpha)^\nu}{\nu!}\right] d\,U(\lambda)}{1 - \sum\limits_{k=0}^{\nu} P(k;\alpha)}$$

$$E(\Lambda|N(\alpha)>\nu) = \frac{E(\Lambda) - \frac{1}{\alpha}\sum\limits_{k=0}^{\nu}(k+1)\,P(k+1\,;\alpha)}{1 - \sum\limits_{k=0}^{\nu} P(k;\alpha)}$$

$$= \frac{E(\Lambda) - \sum\limits_{k=0}^{\nu} P(k;\alpha)\,E(\Lambda|N(\alpha)=k)}{1 - \sum\limits_{k=0}^{\nu} P(k;\alpha)}$$

Ces moments a posteriori, ainsi que d'autres que l'on pourrait calculer, peuvent, par comparaison avec $E(\Lambda)$, servir de base pour la mise en oeuvre éventuelle d'une politique de bonus.

Ils jouissent de diverses propriétés dont voici quelques-unes.

a) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} P(\nu;\alpha)\,E(\Lambda|N(\alpha)=\nu) = E(\Lambda)$$

En effet, le 1er membre s'écrit:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} P(\nu;\alpha)\,\frac{\nu+1}{\alpha}\,\frac{P(\nu+1\,;\alpha)}{P(\nu;\alpha)} = \frac{E[N(\alpha)]}{\alpha}$$

Par l'expression de $E(\Lambda|N(\alpha)>\nu)$, $E(\Lambda)$ s'écrit plus généralement

$$E(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\nu} P(k;\alpha)\,E(\Lambda|N(\alpha)=k) + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} P(k;\alpha)\,E(\Lambda|N(\alpha)>\nu)$$

b) $E(\Lambda|N(\alpha)=\mu) > E(\Lambda|N(\alpha)=\nu)$ pour tout $\mu > \nu$.

Ceci n'est qu'une autre forme de la propriété générale suivante des lois de Poisson composées

$$\frac{(n+1)\,P(n+1\,;t)}{P(n;t)} \geqslant \frac{nP(n;t)}{P(n-1\,;t)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

qui découle du fait que P (o, t) est une fonction absolument monotone décroissante au sens de S. Bernstein $[(-1)^n P^{(n)}(0; t) \geqslant 0]$.

L'égalité n'est réalisée que pour une loi de Poisson pure.

c) $E(\Lambda | N(\alpha) > \nu) =$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{k=\nu+1}^{\infty} P(k; \alpha)} \sum_{k=\nu+1}^{\infty} P(k; \alpha)\, E(\Lambda | N(\alpha) = k) > E(\Lambda | N(\alpha) = \nu + 1)$$

Cette propriété s'obtient immédiatement en introduisant les deux précédentes dans l'expression de $E(\Lambda | N(\alpha) > \nu)$.

d) Toutes autres choses restant égales, $E(\Lambda | N(\alpha) = \nu)$ et $E(\Lambda | N(\alpha) > \nu)$ sont des fonctions décroissantes de α. En effet, compte tenu que

$$P'(\nu+1; \alpha) = \int_0^\infty \left[-\lambda e^{-\lambda\alpha} \frac{(\lambda\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \frac{(\nu+1)\, \lambda^{\nu+1} \alpha^{\nu}}{(\nu+1)!} e^{-\lambda\alpha} \right] d\, U(\lambda)$$

$$= \frac{\nu+1}{\alpha} P(\nu+1; \alpha) - \frac{\nu+2}{\alpha} P(\nu+2; \alpha)$$

on voit aisément que le signe de $\dfrac{d\, E(\Lambda | N(\alpha) = \nu)}{d\alpha}$ est le même que

celui de $(\nu+1)\, P^2(\nu+1; \alpha) - (\nu+2)\, P(\nu; \alpha)\, P(\nu+2; \alpha) \leqslant 0$. (voir b).

Mais ces relations dont plusieurs ont d'ailleurs déjà été indiquées par J. Dubourdieu [1]) ne sont guère que des résultats de bon sens. Pour obtenir des indications pratiquement utilisables, il faut particulariser la loi de Poisson composée, la soumettre à l'expérience et en tirer des renseignements numériques.

C'est ce que nous nous proposons de faire dans le chapitre suivant.

III. Application Statistique

1. *Choix d'une loi de référence*

Une étude statistique de la loi de distribution du nombre de sinistres exige plus que la détermination de la „fréquence moyenne"

[1]) J. Dubourdieu, Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition, Paris 1952.

des sinistres à laquelle se bornent habituellement les services chargés de la tarification du risque Automobile. Il faut dresser une statistique donnant le nombre de véhicules qui, observés tous pendant une période déterminée, ont eu respectivement 0, 1, 2, ... sinistres. La direction de LA ROYALE BELGE nous a aimablement autorisé à établir et à utiliser un tel relevé tiré de son portefeuille d'assurance automobile et nous l'en remercions vivement.

Un premier examen de ces statistiques montre qu'elles présentent systématiquement diverses propriétés générales des lois de Poisson composées:

a) $P(o; t)$ est toujours supérieur à $e^{-t.E(\Lambda)}$;

b) $\sigma^2[N(t)]$ est toujours supérieur à $E[N(t)]$;

c) La propriété signalée au II. 3, b. est le plus souvent vérifiée sauf pour des valeurs de n devenant assez grandes, auquel cas le petit nombre d'observations favorise l'irrégularité.

Ce premier coup d'oeil encourage à tenter la compensation des lois $P(n; t)$ observées par des lois de Poisson composées.

Il faut alors choisir l'une de ces lois. On peut penser d'abord à adopter l'une ou l'autre expression analytique pour $U(\lambda)$ et à en expliciter la loi $P(n; t)$. Mais ce n'est pas indispensable, car de toutes façons les vérifications statistiques ne porteront pas sur la loi U (λ) elle-même. Nous avons donc adopté le point de vue exposé par M. Hofmann [1]) et qui consiste à considérer que toute loi de distribution d'une variable entière non négative, définie par:

$$P(0; t) = e^{\theta(t)}$$

$$P(n; t) = (-1)^n \frac{t^n}{n!} P^{(n)}(0; t)$$

avec $\theta(t)$ indéfiniment dérivable et telle que

$$\theta(0) = 0$$

$$(-1)^n \theta^{(n)}(t) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } t > 0$$

est une loi de Poisson composée, car $P(0; t)$ est alors une fonction absolument monotone décroissante sur le demi-axe $t > 0$ et peut, selon un théorème de S. Bernstein, être mise sous la forme $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \, d\, U(\lambda)$, $U(\lambda)$ étant une fonction non décroissante de λ.

[1]) M. Hofmann, Über zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung, Bulletin des actuaires suisses, Vol. 55-3.

Comme $P(0; 0) = 1$ et que l'on peut prendre $U(0) = 0$, $U(\lambda)$ est la fonction de répartition d'une variable non négative.

Pour ne pas allonger cette note, nous renvoyons à l'article cité, pour plus de détails.

Nous adopterons pour expression de $\theta(t)$ la fonction à 3 paramètres proposée et étudiée par M. Hofmann et telle que

$$P(0; t) = \exp.\left\{\frac{p}{c(1-a)}\left[1-(1+ct)^{1-a}\right]\right\} \quad (p, a, c > 0; a \neq 1)$$

La loi de structure $U(\lambda)$ correspondante est définie par sa fonction caractéristique

$$\int_0^\infty e^{iz\lambda}\, d\,U(\lambda) = P(o; -i\,z)$$

et ne peut être explicitée dans tous les cas. Mais peu importe, ses cumulants sont toujours donnés par

$$\chi_k = (-i)^k \left(\frac{d^k \log P(0; -iz)}{dz^k}\right)_{z=0}$$

soit $\chi_1 = p$

$$\chi_k = p(ac)^{k-1}\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{2}{a}\right)\cdots\left(1+\frac{k-2}{a}\right) \text{ pour } k \geqslant 2$$

D'où $E(\Lambda) = p$

$\sigma^2(\Lambda) = pb$, en posant $b = ac$.

2. *Exemple d'ajustement*

Une statistique portant sur des véhicules de la catégorie „Tourisme et affaires" et appartenant aux 2 classes inférieures du tarif, observés tous pendant une année entière, a donné les résultats suivants dans lesquels:

n est le nombre de sinistres observés;

V_n (col. 2) est le nombre de véhicules ayant eu n sinistres réels, c'est-à-dire à l'exclusion des sinistres sans suite n'ayant provoqué aucun décaissement.

N.B.: Bien qu'appartenant à 2 classes de tarif, ces véhicules ont été rassemblés en une statistique unique, car les taux instantanés de sinistre de ces classes se sont révélés extrêmement voisins.

n (1)	V_n Résultats observés (2)	Résultats ajustés: Loi de référence (3)	Résultats ajustés: Loi de Poisson (4)
0	7.840	7.840,0	7.635,6
1	1.317	1.322,1	1.636,7
2	239	225,4	175,4
3	42	51,2	12,5
4	14	14,6	0,7
5	4	4,8	0,0...
6	4	1,7	0,0...
7	1	0,7	0,0...
	9.461 = V		

La détermination des paramètres de la loi ajustée a été faite par les relations suivantes:

$$(1) \qquad E[N(1)] = p \cong \frac{\Sigma n . V_n}{V} = 0{,}21435366$$

$$(2) \qquad \sigma^2[N(1)] = p(b+1) \cong \frac{\Sigma n^2 V_n}{V} - \left(\frac{\Sigma n \; V_n}{V}\right)^2$$

$$b = \frac{\Sigma n^2 V_n}{\Sigma n \, V_n} - \frac{\Sigma n \; V_n}{V} - 1 = 0{,}34777652$$

$$(3) \qquad P(0;1) = \exp. \left\{\frac{p}{c(1-a)}[1-(1+c)^{1-a}]\right\} \cong \frac{V_0}{V}$$

D'où l'équation transcendante en a:

$$\frac{a}{a-1}\left[1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{a-1}\right] = \frac{b}{p}(\log V - \log V_0)$$

qui se résout par approximations successives compte tenu que le

1er membre est une fonction décroissante de a et tend vers $\log (1+b)$ pour a tendant vers 1. On trouve $a=0{,}34178$.

On pourrait penser à tester la qualité de l'ajustement par la méthode du χ^2, mais il est douteux que cette méthode soit théoriquement applicable, étant donné la manière arbitraire dont la 3e relation a été choisie. Quoi qu'il en soit ce n'est pas indispensable pour se rendre compte que l'ajustement, bien que n'étant pas optimum, se révèle très satisfaisant ainsi que le montre la comparaison entre les V_n observés et les V_n ajustés; à titre documentaire, on a indiqué les résultats donnés par une loi de Poisson pure.

Divers ajustements analogues ont été faits pour d'autres classes de tarif et d'autres durées d'observation; ils montrent généralement un bon accord entre les résultats observés et la loi ajustée et ils confirment la conception a priori que le bon sens permettait d'envisager pour la loi $P(n; t)$.

3. *Etude critique des ajustements*

Bien entendu les paramètres a et b traduisant l'hétérogénéité des classes de tarif observées ne sont pas constants d'un ajustement à l'autre. Examinons brièvement la signification pratique de ces paramètres.

Si $a > 1$, $\lim_{t\to\infty} P(0; t)$ est finie. Cela n'est possible que si parmi les groupes homogènes constituant la classe considérée, il en est un dont le taux instantané de sinistre λ est nul. L'étude théorique indiquée en III. 1. montre d'ailleurs que si $a > 1$, la loi de structure $U(\lambda)$ a une discontinuité au point 0. Une telle hypothèse ne nous paraît pas plausible dans le cas qui nous occupe.

Si $a=1$, un passage à la limite montre que la loi de distribution est

$$P(0; t) = (1 + ct)^{-p/c}$$

$$P(n; t) = (1 + ct)^{-p/c}\left(\frac{ct}{1 + ct}\right)^n \frac{\Gamma(\frac{p}{c} + n)}{\Gamma(\frac{p}{c})\, n!}$$

soit une loi binomiale négative.

Cette loi apparaît dans le cas présent comme une limite qui sépare la famille de lois envisagées en 2 grandes classes, celles où $P(0; \infty) = 0$ et celles où $P(0; \infty)$ est finie.

Nous estimons plus conforme au bon sens que la loi ajustée soit telle que $P(0;t)$ tende vers zéro si t tend vers l'infini et par conséquent que a soit $\leqslant 1$. Dans l'ensemble les ajustements faits confirment cette impression et donnent le plus souvent une valeur de $a < 1$ et même $< 1/2$.

Quant au paramètre b, il nous semble que ce n'est pas sa valeur absolue qu'il faut considérer mais plutôt le rapport $\sqrt{\frac{b}{p}} = \frac{\sigma(\Lambda)}{E(\Lambda)}$ qui peut être considéré comme une sorte d'indice d'hétérogénéité relative a priori.

Dans les ajustements opérés, le rapport $\frac{b}{p}$ n'a jamais dépassé 2 et fluctue plutôt autour de 1, avec une certaine tendance à être plus petit quand la période d'observation s'allonge c'est-à-dire quand les anomalies inévitables perturbent moins les résultats.

Bref s'il fallait synthétiser les ajustements opérés et, dans la mesure où il est possible de le faire, on pourrait dire qu'ils confirment la vraisemblance du schéma envisagé et que les paramètres d'ajustement se centrent plus ou moins vers des valeurs voisines de $a = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{p} = 1$.

Bien entendu cette conclusion ne se veut nullement définitive. Nous considérons les résultats obtenus plutôt comme un encouragement à poursuivre les recherches que comme un objectif atteint. Les observations devraient être poursuivies, si possible sur des périodes assez longues de manière à s'assurer d'une stabilité suffisante de la loi de structure. D'autre part, les valeurs des paramètres suggérées ne seraient admissibles que pour traduire une hétérogénéité analogue à celle qui sert de base à ce travail; c'est-à-dire résultant d'une subdivision en classes de tarif basée uniquement sur la cylindrée des véhicules dans une catégorie „Tourisme et affaires". On peut penser qu'une classification plus fine, faisant intervenir la profession par exemple, réduirait l'hétérogénéité.

4. *Moments a posteriori*

Puisqu'il s'agit de comparer les $E(\Lambda|H_\alpha)$ à $E(\Lambda)$ étudions l'espérance mathématique a posteriori de la variable $\frac{\Lambda}{p}$ dont l'espérance mathématique a priori est toujours 1.

La formule du II. 3. donne

$$E\left(\frac{\Lambda}{p}\middle| N(\alpha) = \nu\right) = \frac{\nu + 1}{\alpha p} \frac{P(\nu + 1; \alpha)}{P(\nu; \alpha)}$$

Les diverses probabilités $P(n+1; \alpha)$ s'expriment à partir de la formule de base

$$P(n + 1; \alpha) = (-1)^{n+1} \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} P^{(n+1)}(0; \alpha)$$

Pour la loi d'ajustement envisagée, on a

$$P(0; \alpha) = e^{\theta(\alpha)} \text{ et } P'(0; \alpha) = \theta'(\alpha)\, e^{\theta(\alpha)}$$

Les $P^{(n+1)}(0; \alpha)$ se calculent par la formule de Leibnitz

$$P^{(n+1)}(0; \alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \theta^{(k+1)}(\alpha)\, P^{(n-k)}(0; \alpha)$$

avec
$$\theta(\alpha) = \frac{p}{c(1 - a)} [1 - (1 + c\alpha)^{1-a}]$$

$$\theta^{(k+1)}(\alpha) = (-1)^{k+1} p (1 + c\alpha)^{-a} \left(\frac{c}{1 + c\alpha}\right)^{k} \frac{\Gamma(a + k)}{\Gamma(a)}$$

D'où il vient

$$P(n + 1; \alpha) = \frac{\alpha p}{n + 1} (1 + c\alpha)^{-a} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(a + k)}{k!\, \Gamma(a)} \left(\frac{c\alpha}{1 + c\alpha}\right)^{k} P(n - k; \alpha)$$

Voici, à titre documentaire, quelques valeurs numériques de $E\left(\frac{\Lambda}{p}\middle| N(\alpha) = \nu\right)$ calculées pour $p = 0{,}25$; $\sqrt{\frac{b}{p}} = 1$; $a = \frac{1}{2}$.

TABLEAU I

ν \ α	1	2	3	4	5
0	0,82	0,71	0,63	0,58	0,53
1	1,48	1,21	1,03	0,91	0,82
2	2,45	1,91	1,59	1,37	1,21
3	3,61	2,76	2,25	1,91	1,67
4	4,85	3,68	2,97	2,51	2,17

Le tableau I′ donne les valeurs de $\dfrac{\sigma\left(\frac{\Lambda}{p} \mid N(\alpha) = \nu\right)}{E\left(\frac{\Lambda}{p} \mid N(\alpha) = \nu\right)}$ égales à la racine carrée de $\left(\dfrac{\nu + 2}{\nu + 1} \dfrac{P(\nu + 2; \alpha)\, P(\nu; \alpha)}{P^2(\nu + 1; \alpha)} - 1\right)$ et que l'on peut rapprocher de $\dfrac{\sigma\left(\frac{\Lambda}{p}\right)}{E\left(\frac{\Lambda}{p}\right)} = \sqrt{\dfrac{b}{p}} = 1.$

TABLEAU I′

$\nu \backslash \alpha$	1	2	3	4	5
0	0,90	0,84	0,80	0,76	0,73
1	0,81	0,77	0,73	0,70	0,69
2	0,69	0,67	0,65	0,63	0,62
3	0,59	0,58	0,57	0,56	0,55
4	0,51	0,51	0,50	0,50	0,50

Les valeurs de $E\left(\dfrac{\Lambda}{p} \middle| N(\alpha) = \nu\right)$ sont évidemment influencées par les valeurs des paramètres de la loi ajustée; voyons le sens de cette influence, dans le cas où $\nu = 0$.

Comme $$E\left(\frac{\Lambda}{p} \middle| N(\alpha) = 0\right) = (1 + c\alpha)^{-a} = \left(1 + \frac{b}{a}\alpha\right)^{-a}$$

on voit immédiatement que E décroît si, toutes autres choses restant égales, p croît $\left(\dfrac{b}{p}\text{ restant constant}\right)$ ou si $\dfrac{b}{p}$ croît (p restant constant), c'est-à-dire si le taux instantané ou bien l'hétérogénéité relative croît.

L'étude de $f(a) = \left[-a \log\left(1 + \dfrac{b}{a}\alpha\right)\right]$ montre que E décroît également, si a croît, toutes autres choses restant égales; en effet

$$f'(a) = -\log\left(1 + \frac{b}{a}\alpha\right) + \frac{b\alpha/a}{1 + b\alpha/a} < 0.$$

Illustrons l'influence de la variation des paramètres par quelques valeurs de E calculées respectivement dans les cas suivants:

$$-p = 0{,}25\,; \quad \sqrt{\frac{b}{p}} = 0{,}50\,; \; a = \frac{1}{2} \text{ (Tableau II)}$$

$$-p = 0{,}25\,; \quad \sqrt{\frac{b}{p}} = 1 \quad ; \; a = 1 \text{ (Tableau III).}$$

Le cas où $a = 1$ est celui où la loi d'ajustement est la loi binomiale négative c'est-à-dire où la loi de structure est une loi de Pearson du type III ; c'est le cas bien connu de la régression linéaire

où
$$E\left(\frac{\Lambda}{p}\,\middle|\, N(\alpha) = \nu\right) = \frac{1 + b\nu/p}{1 + b\alpha}$$

TABLEAU II

ν \ α	1	2	3	4	5
0	0,94	0,89	0,85	0,82	0,78
1	1,17	1,09	1,03	0,98	0,94
2	1,43	1,33	1,25	1,18	1,12
3	1,73	1,60	1,49	1,40	1,32
4	2,07	1,90	1,76	1,64	1,54

TABLEAU III

ν \ α	1	2	3	4	5
0	0,80	0,67	0,57	0,50	0,44
1	1,60	1,33	1,14	1,—	0,89
2	2,40	2,—	1,71	1,50	1,33
3	3,20	2,67	2,29	2,—	1,78
4	4,—	3,33	2,86	2,50	2,22

Comme il fallait s'y attendre, ces tableaux mettent en évidence l'influence primordiale de l'hétérogénéité a priori mesurée par $\sqrt{\frac{b}{p}}$, influence qui est nettement plus forte que celle d'une variation du paramètre a.

IV. Considerations Pratiques et Conclusions

1. Nous mesurons bien l'imperfection et l'insuffisance des quelques statistiques que nous avons pu analyser. Ainsi par exemple il est certain que l'hypothèse de l'indépendance entre les variables „nombre de sinistres'' et „coût d'un sinistre'' que nous avons posée faute de mieux, réclame un examen plus minutieux. A cet égard, nous n'avons pu jusqu'à présent donner qu'un petit coup de sonde qui a consisté à relever à partir d'une série de „gros'' sinistres ($\geqslant$ 200.000 Frs belges) ayant frappé des véhicules qui avaient tous été soumis au risque pendant une période d'une année, le nombre V_n de ces véhicules qui avaient eu respectivement $n=1, 2, \ldots$ sinistres au total pendant la période considérée. Voici le résultat de ce relevé:

n	V_n observés	V_n théoriques approximatifs
1	41	49
2	13	9,3
3	4	2
4	3	0,5
	61	

Les valeurs observées des divers V_n s'accordent plus ou moins avec les valeurs théoriques qui seraient déduites d'une statistique portant sur l'ensemble des véhicules soumis au risque. Cette seule observation n'a évidemment aucun poids; nous ne la signalons que pour mémoire; il faudrait la poursuivre et l'amplifier.

L'analyse de la loi de probabilité de la variable „nombre de sinistres'' devrait elle aussi être approfondie pour permettre de préciser l'estimation de l'hétérogénéité des classes de tarif, de dépouiller cette hétérogénéité d'une variation systématique éventuelle du taux moyen de sinistre et de s'assurer d'une stabilité suffisante de la loi de structure.

Nous pensons bien que des observations plus poussées permettraient d'affermir l'opinion qu'il est techniquement légitime de corriger l'inévitable imperfection a priori des tarifs „Automobile'' par une politique de bonus pour non sinistre.

Toutes les difficultés ne seraient pas surmontées pour autant, car il resterait à choisir un système pratique de bonus.

2. Un tel système devrait répondre au moins aux impératifs suivants:

— ne pas rompre l'équilibre entre les recettes et les dépenses;

— être aussi équitable que possible;

— ne pas entraîner trop de complications administratives.

Si le tarif de base d'une classe de risque est le tarif „moyen'' pour l'ensemble de cette classe, l'impératif d'équilibre, en accord d'ailleurs avec l'équité, exige que le bonus accordé à certains assurés soit compensé par une surprime infligée aux „mauvais risques''. Les valeurs théoriques de ces bonus et de ces pénalisations, basées sur les valeurs individuelles des $N(\alpha)$ observées, sont données par les moments a posteriori, pour une hétérogénéité admise comme valable pour la classe considérée; ces valeurs sont équilibrées, par „génération'' d'assurés, comme le démontre la propriété II. 3. a. Les quelques valeurs calculées en III. 4. montrent combien les pénalisations devraient être lourdes. De telles surprimes font se récrier les praticiens; cependant font-elles plus que traduire l'extrême importance du comportement du conducteur dans l'appréciation d'un risque automobile?

Pour éviter de trop fortes surprimes apparentes il faut tout d'abord essayer de réduire l'hétérogénéité des classes en nuançant le tarif par l'introduction de critères supplémentaires (profession, type de véhicule, âge du ou des conducteurs éventuels, etc...). Des études poussées dans ce sens amélioreraient les tarifs a priori. Nous pensons qu'elles laisseraient néanmoins subsister une hétérogénéité suffisante pour justifier une politique de bonus, c'est-à-dire notamment l'application de surprime.

On peut évidemment diminuer l'importance relative de ces surprimes en élevant a priori le tarif de base, mais plus on le fait plus on bouscule l'équité.

Certes le choix d'un système de bonus ne peut faire abstraction de considérations extra-techniques, commerciales, administratives et autres, qui sont susceptibles d'infléchir les conclusions techniques. Mais quoi qu'il en soit, il est toujours possible dans une hypothèse donnée — et prudente — d'hétérogénéité de bâtir un système de bonus théoriquement équilibré.

Il n'est pas difficile non plus de passer d'un taux de bonus applicable aux primes pures à un taux de bonus „commercial''.

Les commissions aux agents, si le pourcentage en est constant, ne jouent aucun rôle. Quant aux frais généraux d'administration, il faut les décomposer d'une part en frais d'émission et de gestion des contrats, et d'autre part en frais de gestion et de règlement des sinistres, le taux de bonus „pur" ne s'appliquant qu'à ces derniers. Il n'y a donc pas de difficulté à cet égard si la comptabilité est organisée pour l'analyse des frais par département et par service.

3. Sans vouloir faire une analyse complète de la question, on ne peut toutefois omettre de signaler qu'une politique de bonus prête le flanc à diverses objections.

Dans certains pays — et c'est le cas en Belgique — la clause de „conduite exclusive" n'existe pratiquement plus; car l'assureur est toujours obligé d'intervenir quel que soit le conducteur, quitte à se retourner contre le preneur d'assurance si le conducteur n'était pas celui qui avait été désigné dans la police; mais cette procédure est fort délicate. On assure donc en fait le véhicule et non le conducteur. On objecte alors que l'observation du comportement passé du ou des conducteurs du véhicule peut se révéler absolument dépourvue de toute signification pour l'avenir, puisque le conducteur futur peut être une autre personne.

Cette objection n'est pas sans fondement; mais elle nous paraît en pratique plus grave pour une „flotte" de véhicules d'une firme industrielle ou commerciale que pour des véhicules privés.

On pourrait soutenir aussi que le comportement d'un conducteur bien déterminé peut changer au fil du temps et par conséquent que le passé n'est pas garant de l'avenir. Mais cette incertitude ne pèse-t-elle pas sur la plupart des prévisions qui sont à la base même du fonctionnement de notre industrie?

On pourrait encore invoquer la possibilité pour l'assuré de „jouer contre la Compagnie" en ne déclarant pas certains petits sinistres, pour esquiver une pénalisation plus coûteuse et fausser ainsi l'équilibre théorique du système de bonus adopté. Cette possibilité est réelle mais le jeu est complexe; en cas de sinistres répétés, il peut se retourner contre l'assuré qui n'est pas certain de jouer toujours la bonne carte.

4. Embrassant les aspects théoriques et pratiques de la question, on est finalement amené à conclure que l'attitude à adopter à l'égard d'une politique de bonus pose un problème de gestion qui, comme tel, est essentiellement et fatalement un arbitrage entre facteurs contradictoires. Il appartient en définitve aux responsables d'une gestion automobile de peser ces divers facteurs administratifs, commerciaux, purement techniques, moraux et autres. Mais quel que soit l'enchevêtrement de ces facteurs, on se trouve finalement — toutes réductions faites — devant l'option suivante: tenir compte d'une façon imparfaite ou ne pas tenir compte du tout, dans l'appréciation du risque automobile, du comportement du conducteur qui en est un facteur important. Certes il reste bien des points à éclairer et à cet égard le manque de statistiques suffisamment fouillées est un gros handicap: aussi la confrontation que l'Institut des Actuaires Français a décidé d'organiser ne peut-elle être que bienvenue et enrichissante.

Je remercie M. P. Jaspard qui s'est chargé de la plupart des calculs numériques.